ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

zeri di $F(x)$, interni a C. La conclusione rimane ancora esatta se ad uno stesso semipiano appartengono tutti gli zeri delle $f_n(x)$, ad eccezione di un numero finito di essi; ed anche se solamente i punti limiti di questi zeri appartengano ad uno stesso semipiano, purchè tra i punti limiti non sia ∞. Possiamo, perciò, dire che

se si può costruire un poligono convesso (od una curva chiusa convessa) tale che nel suo interno e sul suo contorno siano contenuti tutti i punti limiti degli zeri delle funzioni razionali intere $f_n(x)$, allora esternamente al poligono detto non possono esistere zeri di $F(x)$, *interni a* C. Ed anche *se tutti i punti limiti (fra i quali non è $x = \infty$) degli zeri delle $f_n(x)$ sono su una medesima retta, non possono, fuori della retta, esistere zeri di* $F(x)$ *interni a* C.

Questa proposizione resta vera anche se $x = \infty$ figura tra i punti limiti, purchè la distanza degli zeri delle $f_n(x)$ dalla retta considerata tenda a zero al crescere del modulo degli zeri stessi.

Meccanica. — *Sopra le correnti liquide spontanee.* Nota di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Il moto di un liquido, in assenza di forze di massa, avvenga per piani paralleli, col medesimo comportamento su ciascuno di essi in modo da corrispondersi i punti di una medesima retta perpendicolare.

Se si assume un piano qualunque del fascio per piano $z = 0$ di un sistema di riferimento, cartesiano ortogonale $(0\,; x\,, y\,, z)$, l'aspetto cinematico del fenomeno risulta indipendente dalla coordinata z.

Se si suppone poi che il fenomeno abbia carattere permanente, *tutto sarà indipendente oltre che da z anche dal tempo t.*

Assumiamo eguale ad 1, per maggior comodità, la densità (costante) del liquido, e chiamiamo p la pressione specifica. Se si indicano al solito con u e v le componenti della velocità, e si pone

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\;, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\;, \tag{1}$$

dove $\Psi(x\,, y)$ designa un integrale della equazione

$$\underset{2}{\Delta}\Psi = f(\Psi)\,, \tag{2}$$

con f funzione arbitraria di Ψ, è noto che le (1) rendono soddisfatte tutte le equazioni indefinite [1].

[1] Cfr. ad es. Lamb., *Lehrbuch der Hydrodynamik* (trad. tedesca), Leipzig und Berlin, Teubner, 1907, pag. 285.

In quanto alla pressione p, essa a norma delle equazioni di Eulero e per le (1), è definita dalla relazione differenziale

$$dp=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)dy,$$

oppure per le (2), qualora si ponga

$$f(\psi)=\mathrm{F}'(\Psi), \tag{3}$$

e

$$\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

dalla

$$dp=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{F}-\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2\right\}dx+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathrm{F}-\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2\right\}dy,$$

dalla quale integrando si ha infine

$$p=\mathrm{F}-\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)^2 \tag{4}$$

includendo la costante di integrazione nella funzione arbitraria $\mathrm{F}(\Psi)$ [1].

Il moto liquido avvenga nel piano $z=0$ tra due linee *libere* λ e μ: sieno esse indefinitamente estese (fig. 1), oppure rientranti in sè stesse (fig. 2); e del resto abbiano forma qualsiasi.

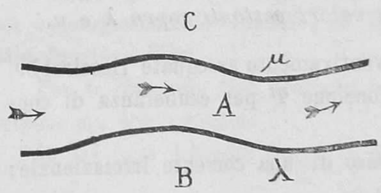

FIG. 1.

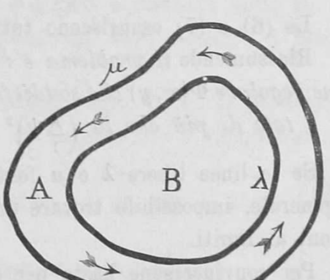

FIG. 2.

In entrambi i casi le linee libere λ e μ dividono il piano in tre parti A, B, C. In A avvenga il moto permanente (corrente) e in B e C regni la quiete.

Essendo in riposo il liquido in B e C, dacchè non agiscono forze di massa, la pressione è ivi da ritenersi costante.

[1] Cfr. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge: University Press, 1880, pag. 14-15.

Indicando con p_B e p_C i rispettivi valori costanti di p in B e in C avremo

$$(5) \qquad \begin{cases} p = p_B & \text{in B}, \\ p = p_C & \text{in C}. \end{cases}$$

In A, dove ha luogo il movimento, la $\Psi(xy)$ (funzione di *corrente*) deve soddisfare alla (2); di più sopra λ e μ, trattandosi di linee di flusso, la Ψ deve assumere valori costanti, com'è ben noto.

Fissiamo, in particolare il valore zero della costante su λ, ed il valore costante q sopra μ, si dovrà avere

$$(6) \qquad \begin{cases} \Psi = 0 & \text{sopra } \lambda, \\ \Psi = q & \text{sopra } \mu; \end{cases}$$

q in tal guisa rappresenta la *portata* della corrente.

In quanto al comportamento della pressione p al contorno del campo A, manifestamente devono essere soddisfatte le relazioni seguenti:

$$(7) \qquad \begin{cases} p = p_B & \text{sopra } \lambda, \\ p = p_C & \text{sopra } \mu, \end{cases}$$

ossia, per le (4) e (3), la $\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2$ deve assumere valori costanti sopra λ e μ.

Le (6) e (7) esauriscono tutte le condizioni ai limiti.

Riassumendo *il problema è ricondotto alla determinazione di una funzione regolare* $\Psi(x, y)$ *che soddisfaccia in* A *alla* (2), *sul contorno* $\lambda + \mu$ *alle* (6), *e tale di più che la* $\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2$ *assuma valori costanti sopra* λ *e* μ.

Se le linee libere λ e μ fossero preventivamente assegnate riescirebbe, in generale, impossibile trovare una tale funzione Ψ per esuberanza di condizioni ai limiti.

Per convincersene basta pensare al caso di una corrente irrotazionale; in tal caso la (2) si riduce alla $\underset{2}{\Delta}\Psi = 0$.

Ora le (6)a ssegnano i valori che la Ψ deve assumere sul contorno del campo A, tali condizioni assieme alla $\underset{2}{\Delta}\Psi = 0$ individuano (a meno di una costante additiva), com'è ben noto, una funzione regolare Ψ; ma non c'è nessuna ragione da ritenere che la Ψ così determinata debba soddisfare all'altra condizione relativa al $\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)^2$.

Ne segue che l'esistenza di una funzione Ψ, integrale della (2) e soddisfacente a tutte le condizioni ai limiti, è subordinata ad una scelta conveniente delle linee libere λ e μ.

Si potrà sempre determinare due linee libere λ e μ in modo da rendere possibile la esistenza di una Ψ soddisfacente a tutte le condizioni su esposte? Di tale questione intendo di occuparmi prossimamente.

Per ora mi limiterò a mostrare, per dare un esempio di effettiva esistenza di soluzioni, che la risposta è affermativa nel caso in cui le due linee λ e μ sono circonferenze concentriche e il campo A è la corona circolare da esse definita.

2. Sia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza di un generico punto (x, y) del piano dall'origine delle coordinate. Immaginiamo che le linee λ e μ coincidano rispettivamente colle circonferenze $r = a$, $r = b$, essendo $a < b$ e di più che la Ψ dipenda dalla sola r. Allora le linee di corrente sono circonferenze concentriche alle estreme, ed il valore assoluto della velocità è $\left|\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)\right| \left|\frac{d\psi}{dr}\right|$.

In tale ipotesi è

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi' \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \Psi' \frac{y}{r}, \tag{8}$$

avendo indicato con un apice la derivazione rispetto ad r. Le (8) rendono identicamente soddisfatta la (2) qualunque sia la $\Psi(r)$. Inoltre, essendo la Ψ costante assieme ad r, si può dire che su ciascuna delle linee λ e μ, Ψ ha valore costante e diverso dall'una all'altra. Infine $\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2 = \overline{\Psi'}^2$, risultando funzione di r, è costante assieme a questa e quindi è costante tanto su λ quanto sopra μ. Si può concludere che *una qualsiasi* $\Psi(r)$ *soddisfa a tutte le condizioni di cui al n. precedente.*

La (4), per le (8), ci dà la pressione in ogni punto di A. Il problema così è completamente risoluto, ed il grado di arbitrarietà è rappresentato dalla funzione $\Psi(r)$.

Per trattare un caso concreto, immaginiamo ad es. che il moto della corrente sia irrotazionale.

In tal caso dovendo essere la $\Psi(r)$ armonica in A, si avrà

$$\underset{2}{\Delta}\Psi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right) = 0,$$

da cui, integrando, si ricava

$$\Psi = \log\left[C_1 r^{C_2}\right], \tag{9}$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Tali costanti si possono valutare in modo che Ψ soddisfaccia alle (6), per il che basta manifestamente prendere

$$C_1 = a^{-C_2} \quad , \quad q = \log\left[C_1 b^{C_2}\right];$$

queste relazioni determinano C_1 e C_2, e precisamente dànno

$$C_2 = \frac{q}{\log \frac{b}{a}}\,, \quad C_1 = a^{-\frac{q}{\log \frac{b}{a}}}\,. \tag{10}$$

Dalla (9), derivando e tenendo conto di queste, si ha, chiamando V il valore assoluto della velocità,

$$V = \psi' = \frac{q}{\log \frac{b}{a}} \frac{1}{r}\,.$$

Per questa dalla (4), notando che F è in tal caso costante, si ricava per la pressione

$$p = \text{costante} - \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \frac{1}{r^2}\,. \tag{11}$$

E per le (5), notando che tra le pressioni p_B e p_C deve passare la relazione

$$p_B - p_C = \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\},$$

si ricavano per la costante le espressioni seguenti

$$p_B + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2 a^2} = p_C + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2 b^2},$$

per cui la pressione in A viene definita a norma della (11) dalla espressione seguente

$$p = p_B + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right\}, \tag{11'}$$

oppure dalla

$$p = p_C + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right\}. \tag{11''}$$

Con ciò il problema è completamente determinato.