ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Fisica. — *Oscillazioni termiche delle lampade a filamento sottile percorse da correnti alternate, e conseguente effetto raddrizzatore per la presenza di armoniche pari.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

1. Dopo le ricerche teoriche preliminari di Cranzer sulle oscillazioni termiche di un filamento sottile percorso da correnti alternate, l'Ebeling [1] ne fece oggetto di un ampio e interessante studio teorico e sperimentale. Non sembra accettabile il criterio seguito dall'Ebeling di ritenere cioè trascurabile la quantità di calore assorbita dal filamento nelle sue variazioni di temperatura; questa ipotesi però è senza conseguenze nei risultati teorici, poichè l'equazione da lui posta, e che regge l'impiego della potenza istantanea dissipata nel filo, comprende un termine che può anche interpretarsi come rappresentante quella quantità; anzi corrisponde soltanto ad essa quando il filamento è sottratto, nel vuoto, all'azione raffreddatrice delle correnti di convezione.

Dal punto di vista teorico è ancora da osservare che non sembra lecito ritenere costante la resistenza del filo nel computo della potenza istantanea svolta dalla corrente, esprimendola con $e_0 i_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$ quando è $e_0 \operatorname{sen} \omega t$ la f. e. m. agente. Non è lecito, cioè, ritenere che le correnti restino sinusoidali malgrado la variazione periodica di resistenza del filamento. Sarebbe stato inoltre preferibile lasciare imprecisata, fin dove era possibile, la legge di emissione termica del filo, che non è certo nè quella di Newton supposta dal Cranz, nè quella di Dulong e Petit ammessa dall'Ebeling.

Infine la determinazione sperimentale delle temperature istantanee fatta col rilievo all'oscillografo della curva delle tensioni agli estremi del filamento e della curva dell'intensità (le quali due curve permettono di dedurre in ogni istante la resistenza vera del filamento e quindi la sua temperatura) sono, nel caso delle lampade a incandescenza, malsicure, come lo stesso A. dichiara; e ciò a causa della piccolezza della corrente che traversa la lampada. Ed è perciò che mentre egli non potè constatare in modo misurabile uno spostamento di fase tra le variazioni della potenza e quelle della temperatura, i valori ottenuti come limiti estremi di variazione della temperatura, con correnti alternate di diversa frequenza, farebbero ritenere che quel ritardo esisteva, cambiando di valore con la frequenza.

[1] Ebeling, Ann. d. Physik, 27, p. 391, 1908.

Per la importanza teorica e tecnica del problema mi è parso interessante assoggettarlo a una trattazione nuova, che mentre migliori notevolmente la teoria del fenomeno, ne permetta lo studio sperimentale in modo indipendente dai rilievi oscillografici. I primi risultati delle mie ricerche formano l'oggetto di questa Comunicazione.

2. Sia $f(\mathrm{T})$ la emissione totale del filo corrispondente alla temperatura assoluta T; c la sua capacità calorifica media (in unità meccaniche) nei limiti tra cui oscilla la temperatura e a il coefficiente di variazione termica della resistenza nei medesimi limiti; t il tempo; $e_0 \operatorname{sen} \omega t$ la f. e. m. sinusoidale agente agli estremi del filo; ϑ la temperatura del filo contata dalla sua temperatura media T_m, r_m la sua resistenza alla temperatura T_m — Si avrà allora evidentemente:

$$c\frac{d\mathrm{T}}{dt} + f(\mathrm{T}) = \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}{r_m(1 + a\vartheta)}$$

Accetteremo per semplicità una delle ipotesi supposte da Ebeling; che cioè ϑ sia piccolo di fronte a T_m, cosicchè sia lecito tener conto solo delle grandezze di prim'ordine rispetto a $\frac{\vartheta}{\mathrm{T}_m}$.

Si avrà allora sviluppando $f(\mathrm{T}_m + \vartheta)$ in serie di Taylor limitata al secondo termine:

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + ca\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + f(\mathrm{T}_m) + a\vartheta f(\mathrm{T}_m) + \vartheta f'(\mathrm{T}_m) = \frac{e_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}{r_m}$$
$$= \frac{e_0^2}{2r_m}(1 - \cos 2\,\omega t).$$

Supporremo inoltre, e l'ipotesi si giustifica facilmente, che entro i limiti d'approssimazione stabiliti il secondo termine sia trascurabile.

Si avrà, intanto,

$$f(\mathrm{T}_m) = \frac{e_0^2}{2r_m} = \mathrm{W}$$

ove W indica la potenza media spesa nel filo; e inoltre, posto;

$$\mathrm{Q} = af(\mathrm{T}_m) + f'(\mathrm{T}_m)$$

sarà:

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + \mathrm{Q}\vartheta = -\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega t.$$

Siamo condotti, per la forma, alla equazione differenziale che regge l'intensità d'una corrente in un circuito induttivo di resistenza Q, e autoinduzione c, ai cui estremi agisca una f. e. m. sinusoidale; quindi ϑ oscil-

lerà sinusoidalmente con pulsazione 2ω e con un ritardo φ rispetto alla grandezza $-\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\omega$; si potrà porre cioè:

$$\vartheta = \Theta \cos(2\omega t - \varphi) \tag{1}$$

con

$$\Theta = -\frac{e_0^2}{2r_m}\frac{\cos\varphi}{Q} \tag{2}$$

e

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2c\omega}{Q} \tag{3}$$

In particolare se l'emissione seguisse una legge analoga a quella di Stefan, con un esponente β:

$$f(T) = sT^\beta$$

si avrebbe:

$$\Theta = -\frac{\cos\varphi}{a + \frac{\beta}{T_m}}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2c\omega}{W\left(a + \frac{\beta}{T_m}\right)}$$

Queste ultime formole si identificano con quelle di Ebeling quando si faccia $a = 0$; si riconosce subito che questo conduce a divergenze non trascurabili, anche assumendo per a il valore $\frac{1}{1500}$ determinato sperimentalmente da lui col pirometro Wanner per i filamenti metallici a temperatura elevata.

Lasciando imprecisata, come nelle (2) e (3), la legge di emissione, si può osservare che la tangente dell'angolo φ è proporzionale alla capacità termica del filo e alla frequenza della corrente; mentre la variazione massima Θ della temperatura è proporzionale a $\cos\varphi$.

Se ne deduce l'importanza della determinazione di φ per una data frequenza. Tale determinazione può esser fatta indirettamente, ma con molta esattezza, profittando d'una interessante proprietà del filamento di cui la teoria ci rivelerà tosto l'esistenza.

3. Supponiamo, invero, di far agire sul filo la somma di due forze e. m. di diverse pulsazioni, ω e ω_1, e siano esse $e_0 \operatorname{sen}\omega t$ ed $e_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t - \gamma)$.

Si avrà, ponendo ancora:

$$T = T_m + \vartheta$$

con le medesime ipotesi sulla grandezza di $\frac{\vartheta}{T_m}$:

$$c\frac{d\vartheta}{dt}+f(T_m)+Q\vartheta=\frac{e_0^2+e_1^2}{2r_m}-\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega t-\frac{e_1^2}{2r_m}\cos 2\,(\omega_1\,t-\gamma)+$$
$$+\frac{e_0 e_1}{r_m}\left\{\cos\left[(\omega-\omega_1)\,t+\gamma\right]-\cos\left[(\omega+\omega_1)\,t-\gamma\right]\right\}$$

e perciò

$$W=f(T_m)=\frac{e_0^2+e_1^2}{2r_m}$$

Supponiamo adesso che sia:

$$2\omega=\omega_1$$

cioè che la seconda f. e. m. sia di frequenza doppia della prima; sarà:

$$c\frac{d\vartheta}{dt}+Q\vartheta=-\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega t-\frac{e_1^2}{2r_m}\cos\left[4\,\omega t-2\gamma\right]+$$
$$+\frac{e_0\,e_1}{r_m}\left\{\cos(\omega t-\gamma)-\cos(3\,\omega t-\gamma)\right\}$$

Si deduce che ϑ costerà di quattro parti oscillanti sinusoidalmente con le pulsazioni ω, 2ω, 3ω e 4ω. Indicandole rispettivamente con ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ponendo perciò:

$$\vartheta=\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4$$

con i valori massimi Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 e i ritardi φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, si potrà esprimere la resistenza istantanea r del filo con

$$r=r_m\left[1+a\,(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4)\right];$$

e quindi, dato l'ordine di grandezza di a, prossimo a $\frac{1}{1500}$, l'intensità i della corrente sarà misurata da

$$i=\frac{e_0\,\mathrm{sen}\,\omega t+e_1\,\mathrm{sen}\,(2\,\omega t-\gamma)}{r_m}\left[1-a\,(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4)\right]$$

Associando il termine $e_0\,\mathrm{sen}\,\omega t$ con ϑ_1 che varia con la stessa pulsazione ω, e il termine $e_1\,\mathrm{sen}\,(2\omega t-\gamma)$ con ϑ_2 che varia con la pulsazione 2ω, si otterrà un sistema di due termini *indipendenti dal tempo*; cosicchè il filamento, malgrado sia sottoposto a f. e. m. alternative, *sarà traversato da una corrente variabile avente una componente continua.*

Indicandola con I sarà, come è facile riconoscere,

$$I = -\frac{a}{r_m}\left[e_0\,\Theta_1 \operatorname{sen}(\varphi_1+\gamma) + e_1\,\Theta_2 \operatorname{sen}(\varphi_2-\gamma)\right] \tag{4}$$

E poichè

$$\Theta_1 = \frac{e_0\,e_1}{r_m}\,\frac{\cos\varphi_1}{Q}$$

$$\Theta_2 = -\frac{e_0^2}{2r_m}\,\frac{\cos\varphi_2}{Q}$$

sarà

$$I = \frac{e_0^2\,e_1}{2r^2_m}\,\frac{a}{Q}\left[-2\cos\varphi_1 \operatorname{sen}(\varphi_1+\gamma) + \cos\varphi_2 \operatorname{sen}(\varphi_2-\gamma)\right]$$

$$= -\frac{e_0^2\,e_1}{2r^2_m}\,\frac{a}{Q}\left[(\operatorname{sen} 2\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi_2)\cos\gamma + (\cos^2\varphi_2 + 2\cos^2\varphi_1)\operatorname{sen}\gamma\right]$$

ovvero, ponendo:

$$A = \operatorname{sen} 2\,\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,\varphi_2$$

$$B = \cos^2\varphi_2 + 2\cos^2\varphi_1$$

sarà

$$I = -\frac{e_0^2\,e_1}{2r^2_m}\,\frac{a}{Q}\left[A\cos\gamma + B\operatorname{sen}\gamma\right]. \tag{5}$$

Si ha poi

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{c\omega}{Q}\ ,\quad \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{2c\omega}{Q}$$

cioè

$$\operatorname{tang}\varphi_2 = 2\operatorname{tang}\varphi_1 \tag{6}$$

Indicando, perciò, con I′ e I″ le componenti di corrente continua che corrispondono ai valori 0° e 90° di γ, cioè le componenti continue delle correnti ottenute secondo che le due f. e. m. agenti sono, all'origine, in fase o in quadratura, sarà:

$$\frac{I'}{I''} = \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi_1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,\varphi_2}{2\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2} = \frac{A}{B}$$

E posto:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{c\omega}{Q} = K$$

si deduce facilmente

$$\frac{I'}{I''} = \frac{2\,K^3}{1+3\,K^2} = \frac{2\operatorname{tang}^3\varphi_1}{1+3\operatorname{tang}^2\varphi_1}$$

Così *dal rapporto delle due correnti continue* I′ *e* I″ *si potrà determinare* φ_1 *e quindi il ritardo corrispondente a qualunque frequenza, senza che occorra conoscere la legge di emissione del filo, nè la sua capacità calorifica, nè il suo coefficiente di temperatura, nè alcun altro elemento.*

Si potrà poscia dedurre, per mezzo della (4), il valore di $a\Theta_1$ e di $a\Theta_2$, e quindi supposta la conoscenza di a, necessaria anche col metodo oscillografico, si otterranno i valori limiti tra cui, nei diversi casi, oscilla la temperatura del filo.

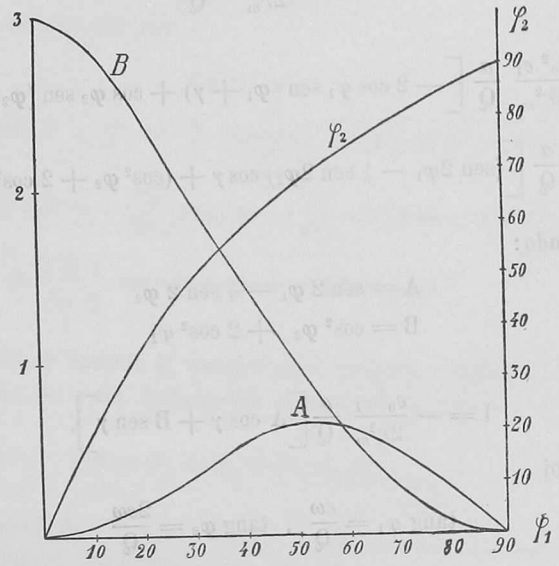

Fig. 1.

4. Come risulta dalla (5) la f. e. m. di pulsazione doppia ha una diversa influenza secondo che sia $\gamma = 0$ ovvero $\gamma = 90$. Tenendo conto della (6) ho calcolato i valori di A e B (cui son proporzionali I′ e I″) corrispondenti ai diversi valori possibili di φ_1; i risultati servirono per costruire le curve della fig. 1 di cui una rappresenta anche la dipendenza tra φ_2 e φ_1 espressa dalla (6). Si vede da queste curve che B decresce sempre fino a zero col crescere di φ_1; mentre A, partendo da zero raggiunge un massimo e poi torna a decrescere fino a zero. Per piccoli valori di φ_1 (cioè della capacità calorifica del filo e della frequenza della f. e. m.) B è fortemente superiore ad A; l'opposto avviene a partire da un valore di φ_1 eguale a circa 57°. Si comprende così ancora una volta che dal rapporto $\frac{I'}{I''}$, eguale ad $\frac{A}{B}$, si

possa avere un mezzo squisito di valutazione di φ_1, tutto riducendosi alla misura di due correnti continue. Occorrerà perciò creare nel circuito in cui è inserita la lampada una f. e. m. alternativa di frequenza doppia della principale, cioè la seconda armonica di questa, facendo in modo che se ne possa regolare e conoscere la fase dell'origine. Per una determinata potenza totale $\frac{e_0^2 + e_1^2}{2r_m}$ spesa nella lampada, cioè per una determinata temperatura media raggiunta dal filo, la componente di corrente continua sarà massima, come è facile riconoscere, quando è

$$e_0^2 = 2\, e_1^2$$

cioè quando la seconda armonica fornisce un terzo dell' energia complessiva.

Si noti infine che ai valori zero e 90° di γ corrispondono per la f. e. m. *totale* agente le due note forme dell'onda che presenta nel 1° caso la simmetria *nei valori massimi*, positivo e negativo, rispetto allo zero; mentre nel secondo una delle semionde è più depressa dell' altra. In quest' ultimo caso l'effetto raddrizzatore prodotto dalla lampada si potrebbe anche giustificare intuitivamente; non è lo stesso però del primo caso.

5. Accingendomi ad eseguire delle esperienze nell'ordine di idee sopra esposto, che saranno completate con ricerche fotometriche sulla luminosità del filamento nelle diverse fasi della corrente, ho voluto anzitutto confermare per via diretta il singolare comportamento previsto dalla teoria, che cioè il filamento, percorso da due correnti alternate di cui l' una di periodo doppio di quello dell'altra, funzionerebbe da raddrizzatore parziale delle correnti; costituendo così il primo esempio (per quanto è a mia conoscenza) di produzione di correnti continue per effetto di f. e. m. alternative agenti in un circuito puramente metallico.

E l'esperienza ha appunto verificato la previsione. Non era possibile, com'è naturale, ricorrere alla f. e. m. alternata della rete di città profittando della eventuale presenza in questa della seconda armonica; poichè la curva della f. e. m. è ordinariamente simmetrica e manca perciò della seconda armonica e in generale di tutte quelle di posto pari. Per raggiungere l'intento nel modo più semplice ho ricorso al seguente ripiego:

La corrente alternata di città (42 periodi, 105 volt) traversata una lampada Z da 50 candele (fig. 2) passa per un rocchetto B in cui è introdotto un lungo fascio di fili di ferro; poscia si biforca tra una resistenza non induttiva R e un circuito derivato costituito da una grandissima autoinduzione S (secondario d'un piccolo rocchetto di Ruhmkorff) e da un galvanometro G per correnti continue (Hartmann e Bruan, tipo Deprez D'Arsonval). Con ciò, a causa della grande impedenza di S, il galvanometro viene percorso da una corrente alternata debolissima, che lascia l'equipaggio quasi

in quiete, specialmente se esso è alquanto pesante; rimangono solo dei lievissimi tremiti intorno allo zero. La presenza di una tenue componente continua della corrente, alla quale non è più d'ostacolo l'elevata induttanza di S, ma solo la sua resistenza ohmica, dove tosto rivelarsi con una deviazione permanente del galvanometro. E questa infatti si constata nettamente appena venga creata nel circuito la seconda armonica dell'onda fondamentale, ordinariamente mancante. Basta a tal fine inviare per mezzo del tasto *t* una corrrente continua nella bobinetta C che circonda l'altro estremo del

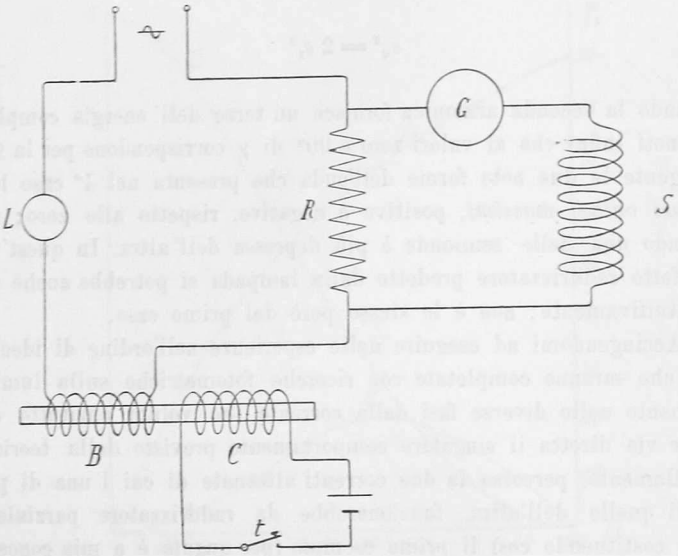

Fig. 2.

fascio di fili di ferro; e invero i cicli di magnetizzazione del ferro divengono con ciò dissimmetrici e questo crea una dissimmetrica nella f. e. m. agente agli estremi della lampada, dissimmetria che, com'è naturale, non produrrebbe alcuna componente di corrente continua in un circuito a resistenza costante. Nelle condizioni da me realizzate, pur essendo molto debole la seconda armonica introdotta nella f. e. m. di città, la componente di corrente continua che traversava l'intero circuito era di circa 1 milliampere, sopra 500 milliampere circa di corrente alternata; era quindi facilmente percepibile e misurabile, e restava ancora misurabile sostituendo alla lampadina a filamento metallico un'altra a filamento di carbone capace di assorbire la stessa potenza elettrica; nel qual caso però la deviazione segnata dal galvanometro s'invertiva e si riduceva ad un decimo. Anche senza la chiusura della corrente continua in C operata dal tasto *t* si ottengono talvolta delle de-

viazioni incostanti al galvanometro; esse son dovute evidentemente a eventuali dissimetrie create nelle due semionde della f. e. m. di città da particolari ricevitori disposti nella rete, come ad esempio dalle lampade ad arco.

Resta con ciò dimostrata la proprietà prevista dalla teoria; e i rilevanti effetti ottenuti che saranno molto intensificati accrescendo l'ampiezza della seconda armonica, lasciano sperare che la ricerca di cui è esposto il piano in questa Nota condurrà a risultati non privi d'interesse.

Fisica. — *Sul comportamento magneto-ottico di alcune linee spettrali.* Nota di MARIO TENANI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica-Chimica — *Su l'ottica dell'oro colloidale.* Nota di LUIGI ROLLA, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO [1].

1. Poichè i risultati sperimentali e le considerazioni teoriche fanno ritenere inaccettabile l'ipotesi secondo la quale le particelle dei metalli colloidali sono da considerarsi come risonatori [2], l'unica via per affrontare i problemi che nascono dallo studio ottico di questa categoria di *dispersoidi* rimane quella tracciata per la prima volta da Lord Rayleigh [3]. Generalizzando e mettendo sotto una nuova luce le formule del fisico inglese Mie [4] sviluppò una teoria che porta una grande chiarezza in queste ricerche, in modo da permettere le brillanti verificazioni sperimentali di Steubing [5].

Per semplicità egli ammise che le particelle siano sferiche, ma, per quanto malagevole per la grande complicazione delle formule che non sempre si presterebbero al calcolo numerico, la teoria potrebbe esser fatta anche nell'ipotesi che esse siano ellissoidiche o cilindriche, il che forse corrisponderebbe con maggior approssimazione ai resultati dell'esperienza. Un'onda

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova, diretto dal prof. Guido Pellizzari.

[2] Ehrenhaft, Annalen der Physik, XI, 489 (1903).

[3] Phil. Mag. (3) *41*, 107, 274, 447; (5) *12*, 81; *47*, 375.

[4] Annalen der Physik, XXV, 377 (1908).

[5] Ibid. XXVI, 329 (1908).