ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Nota del Corrisp. G. Ricci.

In una varietà V_n definita intrinsecamente mediante la forma differenziale quadratica

$$\varphi = \sum_{rs}^{n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

si considerino n congruenze ortogonali di linee $[1], [2], \dots, [n]$, delle quali una qualunque $[i]$ sia rappresentata mediante il sistema di equazioni simultanee

$$(1)\qquad \frac{dx_r}{ds_i} = \lambda_i^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Posto

$$(2)\qquad \lambda_{i/r} = \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs}\, \lambda_i^{(s)}$$

valgono le relazioni

$$(3)\qquad a_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_i\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{i/s}\,,$$

dalle quali risulta

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_i\, \psi_i^2\,,$$

essendo

$$\psi_i = \sum_{1}^{n}{}_r\, \lambda_{i/r}\, dx_r\,.$$

Tra il discriminante a di φ ed il determinante λ del sistema di forme $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ha luogo la relazione $\lambda^2 = a$, per la quale si riconosce che deve essere $\lambda \neq 0$, e che quindi $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ devono essere fra loro linearmente indipendenti.

Se invece si suppongono date n forme lineari $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ indipendenti nei differenziali di n variabili pure indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, e si fanno le posizioni (3), il discriminante a della forma positiva φ risulta diverso da 0, e questa definisce quindi intrinsecamente una V_n. Se con $\lambda_i^{(r)}$ si designa la derivata del logaritmo di λ presa rispetto all'elemento $\lambda_{i/r}$, si riconosce facilmente che le (2) sono soddisfatte, e che le (1) rappresentano di conseguenza (per $i = 1, 2, \dots, n$) n congruenze ortogonali di linee tracciate in V_n.

La metrica di una V_n, oltre che per mezzo di una forma differenziale quadratica positiva, può dunque essere definita mediante un sistema di n

forme differenziali lineari fra loro indipendenti; il che equivale geometricamente a definire la metrica stessa mediante n congruenze ortogonali di linee in essa tracciate. Questo secondo metodo è preferibile all'altro nello studio dei problemi, in cui si tratta di stabilire le condizioni di esistenza ed eventualmente di determinare delle V_n, sulle quali sia possibile tracciare delle ennuple di congruenze ortogonali dotate di proprietà intrinseche prestabilite. In questa classe generale rientrano i problemi, in cui si tratta di ricercare le condizioni di esistenza ed eventualmente di determinare le varietà V_n dotate di proprietà intrinseche date a priori, di proprietà cioè, che riguardino le loro ennuple ed i loro invarianti principali.

Esporrò qui un metodo generale per la risoluzione dei problemi della natura di quelli sopra considerati ed alcune applicazioni alle varietà a tre dimensioni.

1. Partendo dalla consueta rappresentazione intrinseca di una V_n, e considerando una ennupla ortogonale $[1], [2], \ldots, [n]$ di linee in questa tracciate, ho definite altrove e designati coi simboli γ_{hij} quegli invarianti differenziali, ai quali, per il loro significato cinematico, ho dato il nome di rotazioni della ennupla. Essi sono legati dalle relazioni

$$\gamma_{hij} + \gamma_{ihj} \equiv 0,$$

che riducono il loro numero ad $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$.

Se per rappresentare intrinsecamente la V_n si ricorre alla ennupla $[1]$, $[2], \ldots, [n]$, che dirò *fondamentale*, gli invarianti stessi sono definiti dalle formole (¹)

$$\text{(A)} \quad 2\gamma_{hij} = \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right) + \lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(s)} \left(\frac{\partial \lambda_{j/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{j/s}}{\partial x_r} \right) + \lambda_j^{(r)} \lambda_h^{(s)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right) \right\},$$

nelle quali le $\lambda_i^{(r)}$ rappresentano, come fu detto, le derivate di $\log \lambda$ rispetto agli elementi $\lambda_{i/r}$.

Se si considerano come date le rotazioni e come incognite le forme lineari $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista la ennupla corrispondente, e quindi la V_n da essa definita, coincidono con quelle necessarie e sufficienti per la integrabilità del sistema (A); ed ammessa questa, la effettiva sua integrazione conduce alla determinazione di tutte le V_n, nelle quali esistono ennuple ortogonali aventi le rotazioni di cui

(¹) Cfr. Levi-Civita, *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences du 22 Février 1887.

sono stati assegnati i valori; sempre che si escludano i sistemi integrali pei quali risultasse $\lambda = 0$.

Le proprietà intrinseche relative alla ennupla $[1], [2], \ldots, [n]$, sono rappresentate analiticamente da un sistema di equazioni (B) in termini finiti rispetto ai coefficienti dalle forme lineari $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ e differenziali, o in termini finiti rispetto alle rotazioni della ennupla. Perciò, fissate le proprietà intrinseche della ennupla, la ricerca delle varietà V_n, in cui essa possa tracciarsi, equivale a quella relativa alla integrazione del sistema che comprende insieme le equazioni (A) e le (B), nelle quali si considerino come incognite tanto le $\gamma_{h/r}$ quanto le γ_{hij}.

In particolare, se si tratta di determinare delle varietà V_n dotate di proprietà determinate relative alle loro ennuple ed invarianti principali, tra le equazioni (B) dovranno essere comprese quelle che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la ennupla $[1], [2], \ldots, [n]$ sia principale.

2. Per $n = 3$ il numero delle rotazioni di una tripla ortogonale si riduce a nove, ed è allora possibile ed opportuno rappresentarle tutte per mezzo di un simbolo a due indici. Basta per ciò convenire di considerare come equivalenti gli indici che differiscono fra di loro per multipli di 3, e porre

$$\varrho_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2k} = -\gamma_{h+2\,h+1k}.$$

Posto

$$\sigma = \sum_{1}^{3}{}_i\, \varrho_{ii},$$

le equazioni (A) assumono in questo caso la forma

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \lambda\left(\sigma\, \lambda_h^{(r)} - \sum_{1}^{n}{}_i\, \varrho_{ih}\, \lambda_i^{(r)}\right).$$

Se poi si designano con $a_{rs,tu}$ i coefficienti della nota forma quadrilineare di Riemann e si fanno le posizioni

$$a\,.\,\alpha^{(rs)} = a_{r+1\,r+2\,,\,s+1\,s+2}$$

$$(1) \qquad \alpha^{(rs)} = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, \omega_{hk}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_h^{(s)},$$

le espressioni dei coefficienti ω_{hk} assumono la forma

$$(2) \qquad \omega_{hk} = \sum_{1}^{n}{}_r \left(\frac{\partial \varrho_{hk+1}}{\partial x_r}\, \lambda_{k+2}^{(r)} - \frac{\partial \varrho_{hk+2}}{\partial x_r}\, \lambda_{k+1}^{(r)}\right) + \sigma \varrho_{hk} - \sum_{1}^{n}{}_i\, \varrho_{hi}\, \varrho_{ki}$$
$$+ \varrho_{h+1\,k+2}\, \varrho_{h+2\,k+1} - \varrho_{h+1\,k+1}\, \varrho_{h+2\,k+2}.$$

Una prima derivazione del sistema (A_1) e la eliminazione tra il sistema derivato delle derivate seconde delle $\lambda_{h/r}$ conducono, tenuto conto delle (A_1), alle tre equazioni

$$\omega_{hk} = \omega_{kh} \tag{B}$$

in termini finiti rispetto alle $\lambda_{h/r}$ ed a queste equazioni soltanto. Esse si possono dedurre dalle relazioni

$$\alpha^{(rs)} = \alpha^{(sr)}$$

e sono già note; ma la loro importanza per la risoluzione dei problemi, di cui qui si tratta, è messa in evidenza soltanto collo stabilirle nel modo sopra indicato.

3. Supponganasi le ϱ_{hk} costanti. Posto

$$2\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} - \varrho_{h+2\,h+1}, \tag{3}$$

le (B) assumono in questo caso la forma

$$\sum_1^3 {}_i\, \varrho_{hi}\, \delta_i = \sigma . \delta_h .$$

Se le condizioni espresse da queste equazioni non sono soddisfatte, il problema non ammette alcuna soluzione. Se lo sono, si riconosce che il sistema (A_1) è passivo ed ortonomo (¹) ed ammette quindi un gruppo unico di integrali ordinarî rispondente a dati iniziali arbitrariamente scelti compatibilmente colle (A_1).

Limitiamoci a considerare il caso in cui le (3) sono soddisfatte, perchè si verificano le condizioni

$$\delta_h = 0 ,$$

cioè

$$\varrho_{hk} = \varrho_{kh} . \tag{4}$$

Essendo

$$2\delta_h = \gamma_{hh+1\,h+1} + \gamma_{hh+2\,h+2} ,$$

queste condizioni importano che per ogni congruenza $[h]$, il vettore, che ne rappresenta la curvatura geoditica, giacente, come è noto, nel piano delle tangenti alle linee delle congruenze $[h+1]$ ed $[h+2]$, sia diretto secondo il prolungamento della bisettrice dell'angolo di queste tangenti.

Se si eseguisce sulle variabili indipendenti una sostituzione lineare ortogonale a coefficienti costanti, le ϱ_{hk} variano come i coefficienti di una forma bilineare covariante, e perciò, soddisfatte le (4), si può sempre, sostituendo

(¹) Vedasi Riquier, *Les systèmes d'équations à dérivées partielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1910, Chapitre 7.

la tripla fondamentale con altra che abbia sulla primitiva costante orientazione, fare in modo che risultino soddisfatte le

$$\varrho_{hk} = 0 \quad (h \neq k).$$

Si riconosce allora che sono soddisfatte anche le

$$\omega_{hk} = 0 \quad (h \neq k)$$

cioè che la tripla [1], [2], [3] è principale. Per essa calcolando gli invarianti principali si trovano per questi le espressioni

$$\omega_{hh} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \varrho_{i+1\,i+1}\, \varrho_{i+2\,i+2} - 2\varrho_{h+1\,h+1}\, \varrho_{h+2\,h+2}\,.$$

Ritroviamo così una classe di spazî a tre dimensioni, che ammette un gruppo transitivo, a tre parametri almeno, di movimenti rigidi (¹).

4. Come seconda applicazione mi propongo di determinare le V_3 che ammettono delle terne ortogonali costituite di congruenze normali ed isotrope, cioè tali che il vettore rappresentante la curvatura geodetica di ogni congruenza $[h]$ della terna coincida in direzione colla bisettrice dell'angolo, che fanno fra di loro le linee delle congruenze $[h+1]$ ed $[h+2]$. Questa condizione è rappresentata dalle equazioni

$$\varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

mentre la normalità della congruenza $[h]$ è invece rappresentata dalla equazione

$$\varrho_{h+1\,h+1} + \varrho_{h+2\,h+2} = 0\,.$$

Le condizioni del problema sono dunque rappresentate tutte dalle equazioni

$$\varrho_{hk} + \varrho_{kh} = 0\,,$$

le quali, posto

$$\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} = -\varrho_{h+2\,h+1}$$

permettono di esprimere tutte le rotazioni della tripla fondamentale per mezzo delle δ_h, che chiamerò perciò *rotazioni principali* della tripla stessa.

Le equazioni (A_1) assumono così la forma

$$(A_1') \qquad \frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{h|s}}{\partial x_r} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \delta_i (\lambda_{i|r}\, \lambda_{h|s} - \lambda_{i|s}\, \lambda_{h|r})\,,$$

mentre le (2) nel nostro caso diventano

$$(2') \qquad \omega_{hk} = -\frac{\partial \delta_k}{\partial s_h} + \varepsilon_{hk} \sum_{1}^{3}{}_i \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial s_i} - \delta_i^2\right).$$

(¹) Vedasi Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti*, ecc., Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, tomo XII.

essendo

$$\varepsilon_{hk} = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq k \\ 1 & \text{» } h = k, \end{cases}$$

e rappresentandosi con ds_i l'elemento lineare della linea della congruenza $[i]$.

Poichè le congruenze $[1], [2], [3]$ devono essere normali possiamo porre

$$\lambda_{h|r} = \psi_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r},$$

talchè, indicando con D il determinante funzionale di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, dovrà essere

$$D \neq 0.$$

Indicando con μ_1, μ_2, μ_3 delle indeterminate, le (A_1) si sostituiscono così colle

$$(A_2) \qquad \frac{\partial \log \psi_h}{\partial x_r} = \mu_h \lambda_{h|r} - \sum_1^3{}_i \, \delta_i \lambda_{i|r},$$

mentre la espressione del ds^2 della varietà cercata sarà

$$ds^2 = \sum_1^3{}_h \psi_h^2 \, d\varphi_h^2.$$

Una prima derivazione delle (A_2) conduce a condizioni di integrabilità, le quali, N_1, N_2, N_3, rappresentando ancora delle indeterminate, sono espresse dalle equazioni

$$\frac{\partial \log(\mu_h \psi_h)}{\partial x_r} = N_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r},$$

alle quali si soddisfa ponendo

$$\mu_h \psi_h = \chi_h(\varphi_h),$$

χ_1, χ_2, χ_3 essendo simboli di funzioni arbitrarie. Le (A_2) assumono per queste la forma

$$(A'_2) \qquad \frac{\partial \log \psi_h}{\partial x_r} = \chi_h(\varphi_h) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r} - \sum_1^3{}_i \, \delta_i \lambda_{i|r},$$

mentre le (B) ci dicono che le δ_h devono essere le derivate di una funzione arbitraria B prese rispetto alle x_h.

Soddisfatta questa condizione le (A'_2) si integrano poi facilmente, purchè si assumano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ come variabili indipendenti. Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ delle funzioni arbitrarie rispettivamente di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, il loro sistema integrale generale si ha ponendo

$$B\psi_h = \alpha_h,$$

talchè con un semplice cambiamento di parametri risulta

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{B^2}.$$

Concludiamo

a) che le varietà cercate sono tutte e soltanto quelle rappresentabili conformemente nello spazio euclideo;

b) che per esse le terne ortogonali ed isotrope sono precisamente quelle, che dànno al loro ds^2 la espressione canonica sopra riferita;

c) che le rotazioni principali della terna hanno allora le espressioni

$$\delta_h = \frac{\partial B}{\partial x_h}.$$

Se si esige di più che le linee coordinate x_1, x_2, x_3 costituiscano una terna principale, come risulta dalle (2'), è necessario e basta che siano soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial \delta_h}{\partial x_{h+1}} = \frac{\partial \delta_h}{\partial x_{h+2}} = 0,$$

cioè che ogni δ_h sia funzione della sola x_h, cioè che sia

$$B = X_1 + X_2 + X_3,$$

X_1, X_2, X_3 dipendendo rispettivamente da x_1, x_2, x_3 soltanto.

Matematica. — *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare*. Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche nel gruppo della colesterina. — La Fitosterina dell'olio della noce comune* (*Inglans regia*) (1). Nota VII del Socio A. Menozzi e di A. Moreschi.

I dati poco concordanti intorno alle sostanze descritte con il nome di fitosterine e separate da varî grassi vegetali rendono necessario uno studio particolareggiato al fine di stabilire se in molti casi si tratti della identica sostanza oppure di sostanze differenti, ed in questo caso determinare in che rapporti stiano tra loro.

Con questo concetto abbiamo separato e studiato la fitosterina contenuta nell'olio di noce comune (*Inglans regia*).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura, Milano.