ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1910.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

§ 1. — Risoluzione d'una equazione integrale di 2° grado.

1. Poniamo, facendo uso di una notazione adottata in precedenti lavori,

$$\mathbf{M}_1 f = m_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_1(x\,,y)\, dx$$

$$\mathbf{M}_2 f = m_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_2(x\,,y)\, dx$$

e supponiamo che le due funzioni finite e continue μ_1 e μ_2 siano permutabili (¹), cioè si abbia,

$$\int_x^y \mu_1(x\,,\xi)\, \mu_2(\xi\,,y)\, d\xi = \int_x^y \mu_2(x\,,\xi)\, \mu_1(\xi\,,y)\, d\xi\,.$$

Poniamo poi

$$\mathbf{X}_1 f = x_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_1(x\,,y)\, dx$$

$$\mathbf{X}_2 f = x_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_2(x\,,y)\, dx\,,$$

(¹) Vedi la mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 20 febbraio 1910.

e cerchiamo di determinare i parametri x_1, x_2 e le funzioni ξ_1 e ξ_2 in modo tale che

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) f = \mathbf{M}_1 f ,$$
$$\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 f = \mathbf{M}_2 f .$$

2. Dovremo avere

$$x_1 + x_2 = m_1 \quad , \quad x_1 x_2 = m_2$$
$$\xi_1(x\,,y) + \xi_2(x\,,y) = \mu_1(x\,,y)$$
$$x_1 \xi_2(x\,,y) + x_2 \xi_1(x\,,y) + \xi_1 \xi_2(x\,,y) = \mu_2(x\,,y) ;$$

quindi x_1 e x_2 saranno le radici della equazione di secondo grado

$$x^2 - m_1 x + m_2 = 0 ,$$

mentre ξ_1 e ξ_2 soddisfaranno alle equazioni integrali di 2° grado

$$\int_x^y \xi_i(x\,,\zeta)\, \xi_i(\zeta\,,y)\, d\zeta - \int_x^y \xi_i(x\,,\zeta)\, \mu_1(\zeta\,,y)\, d\zeta$$
$$+ (x_i - x_s)\, \xi_i(x\,,y) = - \mu_2(x\,,y) + x_i\, \mu_1(x\,,y)$$

ove i ed s rappresentano i numeri 1 e 2, oppure 2 e 1 respettivamente.

Supponiamo le radici x_1 e x_2 diverse fra loro: allora, applicando la regola data nella Nota precedentemente citata, avremo che $\xi_1(x\,,y)\,,\, \xi_2(x\,,y)$ si otterranno prendendo successivamente il segno $+$ e il segno $-$ nella formula

$$\frac{1}{2}\, \mu_1(x\,,y) \pm \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \left(\frac{2m_1 \mu_1 + \mu_1^2 - 4\mu_2}{m_1^2 - 4m_2}\right)^n .$$

Le potenze e i prodotti delle μ_1 e μ_2 nella serie suddetta debbono considerarsi come operazioni di composizione. In virtù della teoria generale, avremo che *la serie stessa sarà sempre uniformemente convergente.*

§ 2. — Risoluzione di una equazione integro-differenziale ausiliaria.

3. Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$z^2 \frac{\partial^2 f(y\,,z)}{\partial z^2} + z \mathbf{M}_1 \frac{\partial f(y\,,z)}{\partial z} + \mathbf{M}_2 f(y\,,z) = \varphi(y\,,z) \tag{1}$$

in cui $\varphi(y\,,z)$ è una funzione finita e continua.

Essa potrà ancora scriversi

$$z \frac{\partial}{\partial z}\left[z \frac{\partial f(y\,,z)}{\partial z} + \mathbf{X}_1 f(y\,,z) \right] + \mathbf{X}_2 \left[z \frac{\partial f(y\,,z)}{\partial z} + \mathbf{X}_1 f(y\,,z) \right] = \varphi(y\,,z) ;$$

e perciò, applicando i resultati ottenuti in una Nota precedente (¹), ne otterremo la soluzione finita e continua, calcolando dapprima:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\Psi(x\,,z) = &\frac{1}{z^{x_1}}\int_0^z \zeta^{x_1-1}\left[\varphi(x\,,\zeta) + \int_0^x \varphi(\xi\,,\zeta)\,\mathrm{V}_1\!\left(\log\frac{\zeta}{z}\,|\,\xi\,,x\right)d\xi\right]d\zeta\\ &-\frac{1}{z^{x_2}}\int_0^z \zeta^{x_2-1}\left[\varphi(x\,,\zeta) + \int_0^x \varphi(\xi\,,\zeta)\,\mathrm{V}_2\!\left(\log\frac{\zeta}{z}\,|\,\xi\,,x\right)d\xi\right]d\zeta\,,\end{aligned}$$

quindi costruendo:

$$(3)\qquad f(y\,,z) = (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^{-1}\,\Psi(y\,,z),$$

in cui si intende che

$$\mathrm{V}_1(z\,|x\,,y) = \sum_1^\infty {}_n\,\frac{z^n}{n!}\,\xi_1^n(x\,,y)$$

$$\mathrm{V}_2(z\,|x\,,y) = \sum_1^\infty {}_n\,\frac{z^n}{n!}\,\xi_2^n(x\,,y)\,,$$

mentre le potenze di ξ_1 e ξ_2 denotano resultati di operazioni di composizione.

§ 3. — Sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

4. Facciamo uso delle notazioni introdotte nella Nota: *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* (²) e poniamo (³)

$$(4)\qquad \begin{cases}\mathrm{U} = xt_{11} + yt_{12} + zt_{13}\\ \mathrm{V} = xt_{21} + yt_{22} + zt_{23}\\ \mathrm{W} = xt_{31} + yt_{32} + zt_{33}\end{cases}$$

$$\Theta = 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\,\theta\,.$$

Nella ipotesi che non esistano forze di massa, avremo

$$\Delta^2 t_{11} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \qquad \Delta^2 t_{23} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}$$

$$\Delta^2 t_{22} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} \qquad \Delta^2 t_{31} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial x}$$

$$\Delta^2 t_{33} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} \qquad \Delta^2 t_{12} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}$$

$$\Delta^2\Theta = 0\,;$$

(¹) Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 6 febbraio 1910.

(²) Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 19 dicembre 1909.

(³) Cfr. Almansi, Memorie della R. Acc. di Torino, 1897.

quindi

$$\Delta^2 U = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 V = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 W = \frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

e per conseguenza

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= U_1 + (r^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial x}, \\ V &= V_1 + (r^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial y}, \\ W &= W_1 + (r^2 - R)^2\frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

ove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante e U_1, V_1, W_1, f sono funzioni armoniche, mentre

$$(6)\qquad r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right) = \frac{1}{4}\left(r\frac{\partial \Theta}{\partial r} - \Theta\right).$$

5. Se l'origine è nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U_1, V_1, W_1 saranno determinate quando si conoscano le tensioni che sollecitano la sfera al contorno. Tenendo poi conto che dalle (5) e (4) e delle relazioni che legano le tensioni alle deformazioni, si ha

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \\ &= t_{11} + t_{22} + t_{33} = (3\mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_1)\,\theta = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)^{-1}(3\mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_1)\,\Theta, \end{aligned}$$

colla eliminazione di Θ fra questa ultima relazione e la (6) resulterà che f dovrà soddisfare l'equazione integro-differenziale

$$(8)\qquad r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \mathbf{A}_3\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta_1 - r\frac{\partial \Theta_1}{\partial r}\right)$$

in cui

$$\Theta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$\mathbf{A}_3 = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)^{-1}(3\mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_1).$$

L'equazione integro-differenziale (8) rientra nel caso contemplato nel paragrafo precedente, quindi si potrà calcolare f, ottenuta la quale si avranno U, V, W.

Ciò fatto si troverà θ dalla relazione (vedi form. 7))

$$\theta = (3A_2 - 4A_1)^{-1} \left(\Theta_1 + 2r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

e poichè le (4) possono scriversi

$$x(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}) = U$$
$$y(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}) = V$$
$$z(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}) = W$$

potremo ricavare immediatamente i trinomii

$$2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}\ ,\quad x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}\ ,\quad x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}$$

dai quali, col metodo dato dal prof. Almansi [1], si calcoleranno gli spostamenti allorchè si conoscerà lo spostamento e la rotazione della particella che giace al centro della sfera.

6. Nei problemi relativi alla terra, allorchè si vuol tener conto della sua elasticità, non vi ha dubbio che i fenomeni ereditarii debbono avere una influenza non trascurabile. L'analisi precedente offre il mezzo di calcolare in modo completo gli effetti della ereditarietà, qualunque sia la scelta che si faccia della legge di ereditarietà, purchè si supponga la *ereditarietà lineare*. Si noti che le operazioni a cui si deve ricorrere sono sviluppi in serie i cui termini sono ottenuti con operazioni di composizione e quindi sono in generale rapidamente convergenti, giacchè, nella operazione di composizione, ogni potenza ed ogni composizione di più funzioni, conduce ad una quantità il cui ordine di grandezza è affetto da un divisore eguale al fattoriale relativo all'esponente o al numero delle funzioni che si compongono.

Errata-Corrige di Memorie precedenti.

Vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. 1909, fasc. 9, Nota: *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, a pag. 299 ultima riga

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{hk} \varphi_{hk/is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, d\tau \quad \textit{leggi} \quad \int_{t}^{T} \sum_{hk} \varphi_{hk/is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, d\tau .$$

Vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910, fasc. 4, Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, a pag. 178, 3ª riga dell'Art. 19 (§ 8)

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{h}\, m_{ih}^{(p-i)}\, m_{hs}^{i} \quad \textit{leggi} \quad \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{h}\, m_{ih}^{(p-r)}\, m_{hs}^{(r)} .$$

A pag. 180, 2ª riga dell'Art. 20 (§ 3), dalle relazioni funzionali *leggi* dalle relazioni algebriche e funzionali.

[1] Vedi Memoria citata precedentemente.