# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

**Meccanica.** — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo rigido.* Nota IV del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Ho esaminato, nelle Note precedenti, l'azione esercitata da una massa liquida in moto, sopra un corpo *fisso* $S_0$. Io mi propongo ora di estendere questa ricerca al caso più generale che il corpo $S_0$ sia pure in movimento, supponendo sempre che la massa liquida occupi interamente lo spazio S compreso fra la superficie $\sigma$ del corpo, ed un'altra superficie chiusa, immobile, $\sigma'$.

Nella espressione dell'azione A, che è definita dalla formula

$$\text{(1)} \qquad A = \int_\sigma p\lambda\, d\sigma\,, \qquad \left(\int_\sigma \lambda\, d\sigma = 0\right)$$

per ciò che riguarda il movimento della massa liquida devono figurare soltanto le componenti di velocità $u, v, w$, relative a quell'istante a cui si riferisce il valore di A che vogliamo determinare. Potranno pur figurarvi (oltre alla densità $\varrho$) quantità che dipendano solo da $\lambda$, nonchè dalla posizione e dal movimento del corpo in quell'istante, *e negl'istanti successivi*: quantità che saranno considerate come note.

In particolare comparirà nell'espressione di A la funzione $\varphi$, armonica e regolare in S, che sopra $\sigma$ e $\sigma'$ soddisfa le condizioni $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

Noi introdurremo, inoltre, una funzione $\psi$, pure armonica e regolare in S, che nei punti di $\sigma$ e $\sigma'$ soddisfi la condizione

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = N = u\alpha + v\beta + \omega\gamma,$$

$\alpha, \beta, \gamma$ detenotando al solito i coseni direttori della normale $n$ che penetra in S.

Nei punti della superficie fissa $\sigma'$ sarà $N = 0$. Nei punti di $\sigma$ la N sarà nota, conoscendosi il movimento di $S_0$, anche negl'istanti successivi a quello cui si riferisce A. La stessa funzione $\psi$ sarà pertanto da ritenersi come nota (a meno di una costante additiva) in quell'istante *e nei successivi*.

Essa rappresenta il potenziale di velocità relativo ad un movimento della massa liquida, compatibile col dato movimento di $S_0$.

Porremo, riferiti i punti dello spazio ad un sistema $(x\, y\, z)$ di assi *fissi*:

$$\text{(2)} \qquad u_0 = \frac{\partial\psi}{\partial x}\;,\quad v_0 = \frac{\partial\psi}{\partial y}\;,\quad w_0 = \frac{\partial\psi}{\partial z}\,,$$

$$\text{(3)} \qquad u_1 = u - u_0\;,\quad v_1 = v - v_0\;,\quad w_1 = w - w_0\,.$$

Sarà allora, in tutto lo spazio S,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0, \tag{4}$$

e nei punti di $\sigma$ e $\sigma'$:

$$u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma=0. \tag{5}$$

Le funzioni $u_0, v_0, w_0$ sono continue. Invece le $u, v, w$, quindi anche le $u_1, v_1, w_1$ potranno avere delle discontinuità. Ma se $d\omega$ è un elemento di superficie sul quale il vettore $(u_1\, v_1\, w_1)$ è discontinuo, le sue proiezioni, come quelle del vettore $(u\, v\, w)$, sopra una normale a $d\omega$, dovranno essere uguali.

2. Posto

$$f'=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}-(v\zeta-w\eta),\ \text{ecc.},$$

sarà, come nella Nota III,

$$\mathrm{A}=\varrho(\mathrm{B}+\mathrm{C}),$$

ove

$$\mathrm{B}=\int_s\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{S},$$

$$\mathrm{C}=\int_s\left(f'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f''\frac{\partial\varphi}{\partial y}+f'''\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{S}.$$

L'integrale C rappresenta una quantità nota. Quanto a B, poichè $u=u_0+u_1$, ecc., ponendo

$$\mathrm{B}_0=\int_s\left(\frac{\partial u_0}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{S},$$

$$\mathrm{B}_1=\int_s\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{S},$$

sarà:

$$\mathrm{B}=\mathrm{B}_0+\mathrm{B}_1.$$

L'integrale $\mathrm{B}_0$ è pure noto. Ma noi possiamo dargli una forma più semplice, osservando che $\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, ecc. Integrando per parti, e tenendo presenti le proprietà della funzione $\varphi$, avremo:

$$\mathrm{B}_0=-\int_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda\, d\sigma. \tag{6}$$

Per trasformare l'integrale $B_1$ introdurremo la funzione

(7) $$Q_1 = u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

Supporremo poi definita la funzione $\lambda$, e con essa la $\varphi$, anche negl'istanti successivi al tempo $t$ a cui si riferisce il valore di A. Onde sarà, posto $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + u_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} .$$

E perciò

$$B_1 = \int_S \frac{\partial Q_1}{\partial t} dS - B_1' ,$$

ove

$$B_1' = \int_S \left( u_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dS .$$

Con una integrazione per parti, e chiamando $\Sigma$ l'insieme delle due superficie $\sigma$ e $\sigma'$ che limitano lo spazio S, avremo

$$B_1' = -\int_S \varphi' \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dS - \int_\Sigma \varphi'(u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma)\, d\Sigma ,$$

trasformazione lecita, anche se esistono delle superficie $\omega$ su cui $u_1$, $v_1$, $w_1$ siano discontinue, per la continuità di $\varphi'$, e della componente, secondo le normali ad $\omega$, del vettore $(u_1\, v_1\, w_1)$.

In virtù delle formule (4) e (5) sarà $B_1' = 0$; e per conseguenza:

$$B_1 = \int_S \frac{\partial Q_1}{\partial t} dS = \int_S \frac{dQ_1}{dt} dS - \int_S \left( u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS .$$

Ma $\int_S \frac{dQ_1}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_S Q_1\, dS$; e $\int_S Q_1\, dS = 0$, come si riconosce eseguendo su questo integrale, dopo sostituita a $Q_1$ la sua espressione (7), una trasformazione analoga a quella eseguita sopra $B_1'$. Dunque:

$$B_1 = -\int_S \left( u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS .$$

Poichè $A = \rho(B + C)$, e $B = B_0 + B_1$, ponendo $B' = C + B_1$, ossia

(8) $$B' = \int_S \left( f' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f''' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS - \\ - \int_S \left( u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS ,$$

sarà:

(9) $$A = \varrho(B_0 + B').$$

Abbiamo così un'espressione di A che soddisfa alle condizioni richieste.

Ma noi possiamo dare ad A un'espressione diversa, e tale, che nel caso in cui il corpo $S_0$ sia fisso, ci riconduca immediatamente ad una delle formule stabilite nelle Note precedenti.

Poniamo perciò

(10) $$Q = u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

(11) $$Q_0 = u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Sarà allora, per le formule (7) e (3), $Q_1 = Q - Q_0$; e per la (8):

$$B' = \int_S \left\{ \left( f'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f''\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f'''\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) - \left( u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right\} dS +$$
$$+ \int_S \left( u_0\frac{\partial Q_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial Q_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial Q_0}{\partial z} \right) dS.$$

Nel primo integrale la quantità sotto il segno è uguale a $-[Q]^2$, essendo, come nella Nota III

$$[Q]^2 = u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \cdots + 2vw\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} + \cdots$$

Il secondo integrale si riduce a $-\int_\sigma Q_0 N\,d\sigma$. Onde sarà

$$B' = -\int_S [Q]^2\,dS - \int_\sigma Q_0 N\,d\sigma;$$

e per le formule (9) e (6):

(12) $$A = -\varrho\int_S [Q]^2\,dS - \varrho\int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda + Q_0 N\right) d\sigma.$$

Quando il corpo $S_0$ è fisso, sarà $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$, $N = 0$; si ritrova così la formula

$$A = -\varrho\int_S [Q]^2\,dS$$

della Nota III.

Il termine

$$-\varrho\int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda + Q_0 N\right) d\sigma$$

che compare allorchè il corpo si muove, è indipendente dal movimento della massa liquida: esso dipende solo (oltre che da $\varrho$ e da $\lambda$) dalla posizione e dal movimento di $S_0$. La presenza della derivata di $\psi$ rispetto al tempo mostra però che questo termine non dipende soltanto dal movimento (traslazione e rotazione) del corpo $S_0$ *al tempo* $t$.

3. Noi vogliamo porre sotto un'altra forma l'integrale

$$B_0 = -\int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\lambda\, d\sigma\,,$$

che figura nella formula (12).

A tale scopo definiremo la funzione $\lambda$, anche negl'istanti successivi a $t$, supponendo che per *qualunque* posizione del corpo $S_0$ nell'interno di $\sigma'$, si abbia

$$\lambda = X\alpha + Y\beta + Z\gamma\,,$$

ove $X, Y, Z$ rappresentano tre funzioni delle variabili $x, y, z$, regolari in *tutto* lo spazio racchiuso da $\sigma'$, che soddisfano all'equazione:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0\,. \tag{13}$$

Se A rappresenta la componente, secondo uno degli assi coordinati, della forza o della coppia cha agisce sul corpo, sarà:

$$\lambda = -\alpha\,,\ \text{quindi}\ X = -1\,,\ Y = 0\,,\ Z = 0\,,\ \text{ecc.};$$

oppure

$$\lambda = -\gamma y + \beta z\,,\ \text{quindi}\ X = 0\,,\ Y = z\,,\ Z = -y\,,\ \text{ecc.}$$

Dunque $\lambda$ è sempre espressa nel modo indicato.

Avremo pertanto:

$$B_0 = -\int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t}(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma\,;$$

od anche, $\Sigma$ denotando, come nel § 2, l'insieme delle superficie $\sigma$ e $\sigma'$:

$$B_0 = -\int_\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial t}(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\Sigma + \int_{\sigma'} \frac{\partial\psi}{\partial t}(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma'.$$

Dei due integrali che costituiscono il secondo membro dell'equazione, il primo possiamo trasformarlo in un integrale esteso ad S. Il secondo, poichè $\sigma'$ è una superficie fissa, ed $X\alpha + Y\beta + Z\gamma$ conserva, in ogni suo punto, un valore costante, può mettersi sotto la forma di una derivata esatta rispetto al tempo. Tenendo presente, nel trasformare il primo integrale, la equazione (14), avremo:

$$B_0 = \int_s \left\{ X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} + Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t} + Z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t} \right\} dS + \\ + \frac{d}{dt} \int_{\sigma'} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma'.$$

Ora, non dipendendo X, Y, Z dal tempo, posto

$$\theta = X \frac{\partial \psi}{\partial x} + Y \frac{\partial \psi}{\partial y} + Z \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{14}$$

sarà

$$X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} + Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t} + Z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dt} - \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right);$$

e per conseguenza, osservando che

$$\int_s \frac{d\theta}{dt}\, dS = \frac{d}{dt} \int_s \theta\, dS,$$

$$\int_s \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dS = - \int_\Sigma \theta N\, d\Sigma = - \int_\sigma \theta N\, d\sigma:$$

$$B_0 = \frac{d}{dt} \left\{ \int_s \theta\, dS + \int_{\sigma'} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma' \right\} + \int_\sigma \theta N\, d\sigma.$$

Ma per le formule (14) e (13):

$$\int_s \theta\, dS = - \int_\Sigma \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\Sigma.$$

Quindi:

$$B_0 = - \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma + \int_\sigma \theta N\, d\sigma,$$

ossia:

$$B_0 = - \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi \lambda\, d\sigma + \int_\sigma \theta N\, d\sigma:$$

formula che presenta la proprietà (utile nell'applicazione a casi particolari) di non contenere derivate rispetto al tempo sotto i segni d'integrazione.

4. Riprendiamo la formula (12) che scriveremo, sostituendo a

$$- \int_\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda\, d\sigma,$$

ossia a $B_0$, l'espressione trovata:

$$A = - \varrho \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi \lambda\, d\sigma + \varrho \int_\sigma (\theta - Q_0) N\, d\sigma - \varrho \int_s [Q]^2\, dS,$$

o più semplicemente:

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + A_1,$$

essendo:

$$\Phi = -\varrho \int_\sigma \psi \lambda \, d\sigma,$$

$$A_1 = \varrho \left\{ -\int_S [Q]^2 \, dS + \int_\sigma (\theta - Q_0) \, N \, d\sigma \right\}.$$

Poniamo $R = \theta - Q_0$. Sarà:

$$A_1 = \varrho \left\{ -\int_S [Q]^2 \, dS + \int_\sigma R N \, d\sigma \right\}; \tag{15}$$

e per le formule (14), (11) e (2):

$$R = \left( X - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left( Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left( Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Il termine $A_1$ dipende dal movimento della massa liquida; e per movimenti *simili* è proporzionale al quadrato della velocità in un punto. Se infatti moltiplichiamo $u, v, w$ per una costante $c$, $[Q]^2$ risulta moltiplicato per $c^2$; N, quindi anche la funzione $\psi$, ed R, per $c$; dunque RN per $c^2$.

L'altro termine che figura in A è la derivata, rispetto al tempo, di una quantità $\Phi$ *indipendente dal movimento della massa liquida*.

## Matematica. — *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare*. Nota del Corrisp. G. LAURICELLA.

Quando si voglia risolvere il problema di Dirichlet mediante uno strato semplice, distribuito sul contorno del campo che si considera, una prima quistione, che si presenta, è di vedere se esistono o no strati semplici aventi valori nulli nei punti del contorno stesso; ovvero, riferendosi all'equazione integrale di 1ª specie, a cui il problema dà luogo, di vedere se il nucleo (Kern) corrispondente è non chiuso o chiuso. Per i campi a *tre* dimensioni è noto che il nucleo è sempre chiuso, ossia che lo strato semplice, avente valori nulli nei punti del contorno, ha la densità uguale allo *zero*. Non accade lo stesso per il caso delle aree piane. Il Picard in una recente pubblicazione [1], limitandosi al caso di un contorno circolare, ha notato che per la circonferenza di raggio 1 il nucleo è non chiuso, mentre per qualunque altra circonferenza il nucleo è sempre chiuso. Nella presenta Nota

[1] *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIX, anno 1910, pp. 77-97.