# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

o più semplicemente:

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + A_1 ,$$

essendo:

$$\Phi = -\varrho \int_\sigma \psi \lambda \, d\sigma ,$$

$$A_1 = \varrho \left\{ -\int_s [Q]^2 \, dS + \int_\sigma (\theta - Q_0) \, N \, d\sigma \right\} .$$

Poniamo $R = \theta - Q_0$. Sarà:

$$A_1 = \varrho \left\{ -\int_s [Q]^2 \, dS + \int_\sigma RN \, d\sigma \right\} ; \tag{15}$$

e per le formule (14), (11) e (2):

$$R = \left( X - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left( Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left( Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

Il termine $A_1$ dipende dal movimento della massa liquida; e per movimenti *simili* è proporzionale al quadrato della velocità in un punto. Se infatti moltiplichiamo $u, v, w$ per una costante $c$, $[Q]^2$ risulta moltiplicato per $c^2$; N, quindi anche la funzione $\psi$, ed R, per $c$; dunque RN per $c^2$.

L'altro termine che figura in A è la derivata, rispetto al tempo, di una quantità $\Phi$ *indipendente dal movimento della massa liquida.*

## Matematica. — *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Quando si voglia risolvere il problema di Dirichlet mediante uno strato semplice, distribuito sul contorno del campo che si considera, una prima quistione, che si presenta, è di vedere se esistono o no strati semplici aventi valori nulli nei punti del contorno stesso; ovvero, riferendosi all'equazione integrale di 1ª specie, a cui il problema dà luogo, di vedere se il nucleo (Kern) corrispondente è non chiuso o chiuso. Per i campi a *tre* dimensioni è noto che il nucleo è sempre chiuso, ossia che lo strato semplice, avente valori nulli nei punti del contorno, ha la densità uguale allo *zero*. Non accade lo stesso per il caso delle aree piane. Il Picard in una recente pubblicazione [1], limitandosi al caso di un contorno circolare, ha notato che per la circonferenza di raggio 1 il nucleo è non chiuso, mentre per qualunque altra circonferenza il nucleo è sempre chiuso. Nella presenta Nota

[1] *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIX, anno 1910, pp. 77-97.

dimostro l'esistenza di infinite linee piane chiuse (che chiamo *speciali*), per le quali il nucleo è non chiuso, ossia per ognuna delle quali esiste uno strato semplice logaritmico avente valori nulli lungo la linea stessa. Allora si presenta subito la seguente quistione: data una linea piana chiusa, sarà essa speciale o no? Qui do delle condizioni sufficienti perchè una linea non sia speciale, e delle condizioni necessarie (in generale non sufficienti) perchè una linea sia speciale; e dimostro ancora alcune proprietà delle linee speciali e non speciali, le quali possono contribuire a risolvere ogni volta la quistione proposta.

Del problema di Dirichlet mediante uno strato semplice e di altri problemi, che ad esso si ricollegano, mi occuperò in una prossima comunicazione.

1. Sia C una linea piana chiusa, la quale non si intersechi in alcun suo punto e per la quale siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1°) abbia una tangente determinata in ogni suo punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2°) esista un numero fisso positivo $a$ tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle normali $n, n'$ in due punti qualsiasi $s, s'$ di C, rivolte verso l'area piana finita limitata da C, e con $r'$ il vettore $\overline{ss'}$, si abbia:

$$\widehat{nn'} < ar'.$$

Riferiamo i punti del piano C a due assi cartesiani ortogonali $x, y$; ed indichiamo con $s$ l'arco della curva C, contato a partire da un suo punto arbitrario; con $\sigma$ l'area piana finita racchiusa da C; con $\sigma'$ l'area piana infinita limitata pure da C; e con $r$ il vettore che congiunge il punto generico $(\xi, \eta)$ del piano con un punto qualsiasi $s \equiv (x, y)$ di C. Quando il punto $(\xi, \eta)$ è nell'interno dell'area $\sigma$, sarà indicato con P; quando è nell'interno dell'area $\sigma'$, sarà indicato con P'; quando si trova su C, sarà indicato con la corrispondente lunghezza $s'$ dell'arco di curva C. In questo ultimo caso il corrispondente vettore $r$, conformemente a quanto fu fatto sopra, sarà indicato con $r'$.

Osserviamo che, se si pone:

$$\alpha(s, s') = \frac{1}{2\pi} \frac{d \log r'}{dn},$$

sarà

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d \log r'}{dn'} = \alpha(s', s);$$

e la funzione $\alpha(s, s')$ sarà sempre finita e, tranne al più per $s = s'$, continua.

Ciò premesso, indichiamo con $v(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C, e consideriamo lo strato semplice:

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(s) \log r \, ds.$$

Posto:

$$\overline{\frac{dV}{dn'}} = \lim_{P=s'} \frac{dV}{dn'} \quad , \quad \overline{\overline{\frac{dV}{dn'}}} = \lim_{P'=s'} \frac{dV}{dn'} ,$$

si ha, come è noto [1],

$$(1) \qquad \overline{\frac{dV}{dn'}} = \tfrac{1}{2} v(s') + \int_C v(s) \,.\, \alpha(s', s)\, ds ,$$

$$(2) \qquad \overline{\overline{\frac{dV}{dn'}}} = -\tfrac{1}{2} v(s') + \int_C v(s') \,.\, \alpha(s', s)\, ds \ [2].$$

## Teoremi sulle funzioni armoniche.

2. Diremo che una funzione $A(\xi, \eta)$ è armonica in un campo piano finito $\sigma$ limitato da una o più linee, il cui complesso indicheremo con C, se essa è finita e continua in tutto il campo $\sigma$ (i punti di C inclusi), se ha le derivate prime finite e continue in tutto il campo $\sigma$ (i punti di C, al più, esclusi), se esiste ed è finita e continua lungo C l'espressione $\overline{\frac{dA}{dn}}$, e se nei punti dell'interno di $\sigma$ soddisfa all'equazione di Laplace.

Diremo che una funzione $A(\xi, \eta)$ è armonica in un campo piano infinito $\sigma'$ limitato da C, se essa, oltre alle condizioni analoghe a quelle poste per la precedente $A(\xi, \eta)$, soddisfa all'altra di annullarsi all'infinito come $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$.

Come è noto, valgono per la $A(\xi, \eta)$ le seguenti formole:

$$(3) \qquad \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\sigma + \int_C A \overline{\frac{dA}{dn}}\, ds = 0 ,$$

$$(4) \qquad \int_C \overline{\frac{dA}{dn}}\, ds = 0 ,$$

$$(3)' \qquad \int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\sigma' - \int_C A \overline{\overline{\frac{dA}{dn}}}\, ds = 0 ,$$

$$(4)' \qquad \int_C \overline{\overline{\frac{dA}{dn}}}\, ds = 0 .$$

[1] Vedi ad es. per le tre dimensioni Lauricella: *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica*, Nuovo Cimento. ser. V, vol. XIII, 1907, pp. 1-81.

[2] Le formole (1), (2) sono state dimostrate, ponendo condizioni meno restrittive sia per la linea C, che per la funzione $v(s)$ [Vedi G. Pucciano, *Studio sui potenziali logaritmici di strato lineare semplice e doppio, e delle loro derivate prime*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIII, anno 1907, pp. 374-393].

Rammentiamo ancora che se $B(\xi, \eta)$ è una funzione finita e continua in tutto il campo $\sigma'$, la quale ha le derivate prime finite e continue in tutto il campo $\sigma'$, esclusi al più i punti di C, nei punti dell'interno di $\sigma'$ soddisfa all'equazione di Laplace, e per $\varrho$ abbastanza grande si comporta come $\log \varrho$, mentre le sue derivate prime si comportano come $\frac{1}{\varrho}$, ed inoltre è tale che l'espressione $\frac{\overline{\overline{dB}}}{dn}$ esiste ed è finita e continua lungo C, sussiste la formola:

$$(5) \qquad \int_C \left( B \frac{\overline{\overline{dA}}}{dn} - A \frac{\overline{\overline{dB}}}{dn} \right) ds = 0 .$$

3. *Se la funzione armonica* $A(\xi, \eta)$ *del campo* $\sigma'$ *ha valore costante lungo* C, *essa deve essere identicamente nulla in tutto il campo* $\sigma'$.

Infatti dalla (3)′ si ha, indicando con H il valore costante di $A(\xi, \eta)$ su C,

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' - H \int_C \frac{\overline{\overline{dA}}}{dn} ds = 0 ;$$

e perciò, in virtù della (4)′,

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' = 0.$$

Di qui, tenuto conto che la $A(\xi, \eta)$ si annulla all'infinito, risulta la proposizione enunciata.

## Strato a valore costante lungo C.

4. Si considerino le due seguenti equazioni integrali omogenee:

$$(6) \qquad 0 = w_1(s') + 2 \int_C w_1(s) . \alpha(s, s') \, ds ,$$

$$(7) \qquad 0 = v_1(s') + 2 \int_C v_1(s) . \alpha(s', s) \, ds .$$

La (6), come è notorio, ammette la soluzione $w_1(s) =$ costante; quindi *la* (7) *ammetterà una soluzione almeno* $v_1(s)$, *la quale,* IN VIRTÙ DELLA PROPRIETÀ DELLA $\alpha(s', s)$, *sarà finita e continua in tutto il campo* C.

5. Ciò premesso, sia $v_1(s)$ una soluzione qualsiasi dell'equazione (7), e si formi con questa soluzione lo strato semplice:

$$(8) \qquad V_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v_1(s) . \log r . ds .$$

Dalle (1), (7) risulta:

$$\frac{d\overline{V_1}}{dn} = 0;$$

quindi *lo strato* $V_1$ *nei punti di* C *ha un valore costante.*

Dalle (2), (7) si ha poi:

$$\frac{d\overline{V_1}}{dv} = -v_1(s). \tag{9}$$

Rammentiamo che per $\varrho$ abbastanza grande si ha per uno strato qualsiasi $V_1(\xi, \eta)$:

$$V_1(\xi, \eta) = \log \varrho \int_C v_1(s)\, ds + \frac{1}{\varrho} M(\xi, \eta), \tag{10}$$

$$\frac{dV_1}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int_C v_1(s)\, ds + \frac{1}{\varrho^2} N(\xi, \eta), \tag{11}$$

dove le funzioni $M(\xi, \eta)$, $N(\xi, \eta)$ e le loro derivate prime sono finite, continue ed inferiori in valore assoluto ad una quantità, che si può fissare.

Di qui segue che *per una soluzione qualsiasi* $v_1(s)$ *dell'equazione integrale* (7) *si deve avere*:

$$\int_C v_1(s)\, ds \neq 0.$$

Infatti nel caso contrario la $V_1(\xi, \eta)$ sarebbe una funzione armonica nel campo $\sigma'$; e quindi, in virtù del teorema al § 3, dovrebbe essere identicamente nulla in questo campo. Allora si avrebbe:

$$\frac{d\overline{V_1}}{dn} = -v_1(s) = 0$$

lungo la linea C, contro l'ipotesi.

6. Siano $v_1(s)$, $v_2(s)$ due soluzioni qualsiasi dell'equazione integrale (7). In virtù della proposizione testè dimostrata, si dovrà avere:

$$M_1 = \int_C v_1(s)\, ds \neq 0, \quad M_2 = \int_C v_2(s)\, ds \neq 0.$$

Ora si determini una costante $b$ in modo che sia:

$$M_2 - bM_1 = 0;$$

e si consideri la funzione:

$$v_3(s) = v_2(s) - bv_1(s).$$

Essa sarà una soluzione dell'equazione integrale (7); e poichè:

$$\int_C v_3(s)\,ds = \int_C \{v_2(s) - bv_1(s)\}\,ds = 0\,,$$

così dovrà aversi lungo C:

$$v_3(s) = 0\,,$$

ossia:

$$v_2(s) = bv_1(s)\,.$$

Di qui segue, come complemento al risultato stabilito nel § 4, che *l'equazione integrale* (7) *ammette una sola soluzione, determinata a meno di un coefficiente costante* [1].

7. Per fissare le idee, si determini $v_1(s)$ in modo che sia:

$$\int_C v_1(s)\,ds > 0\,.$$

Tenendo conto della (10) si ha che la corrispondente funzione $V_1(\xi, \eta)$ prende il suo minimo valore (costante) su C; quindi sarà in un punto generico di C:

$$\overline{\overline{\frac{dV_1}{dn}}} \leq 0\,;$$

e in virtù della (9) si avrà lungo C:

$$v_1(s) \geq 0\,. \tag{12}$$

Di qui risulta, avuto riguardo alla forma (8) dello strato $V_1(\xi, \eta)$, che *se la curva* C *è tale che esiste un punto nell'area* $\sigma$, *per il quale* $\log r$ *non muta mai di segno e non si annulla in tutti i punti nei quali la* $v_1(s)$ *è diversa da zero, il valore costante di* $V_1(\xi, \eta)$ *nei punti di* C *sarà certamente diverso da zero*; ed in particolare *sarà negativo per tutte le linee* C, *le quali possono essere contenute in un cerchio di raggio* 1, *sarà positivo per tutte le linee* C, *le quali possono abbracciare un cerchio di raggio* 1.

Si ha ancora che *condizione necessaria (in generale non sufficiente) affinchè lo strato* $V_1(\xi, \eta)$ *sia uguale allo zero nei punti di* C *è che la linea* C *sia intersecata da qualunque circonferenza di raggio* 1 *col centro nell'area* $\sigma$.

[1] La prima dimostrazione che io detti di questa proposizione nella mia Nota: *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, t. XV, ser. 5ª, anno 1906, pp. 611-619, dipende dal teorema di Liapounoff sulla continuità delle derivate normali di doppio strato, e richiede condizioni più restrittive sulla natura della linea C.

Chiameremo *linea speciale* una linea C, il cui corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$ si annulla nei punti di C.

## Esistenza di infinite linee speciali.

8. Si consideri una linea C, si dia alla corrispondente funzione $v_1(s)$, soluzione dell'equazione integrale (7), il segno positivo, e si indichi con H il valore costante che il corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$ prende nei punti di C. Osserviamo che per $\varrho$ abbastanza grande la $V_1(\xi, \eta)$ avrà valori maggiori di qualunque numero positivo arbitrariamente dato; sicchè, in virtù della continuità, dato ad arbitro un numero H′ maggiore di H, esisterà nell'area infinita $\sigma'$ limitata da C un luogo C′ di punti $(\xi, \eta)$ tali che:

$$V_1(\xi, \eta) = H'.$$

Dimostriamo anzitutto che il luogo C′ abbraccia C, ossia che non è possibile allontanarsi indefinitamente dai punti di C sul piano, senza incontrare in qualche punto il luogo C′.

Infatti, congiunto mediante una linea piana qualsiasi $\Delta$ un punto arbitrario P di C con un punto qualsiasi P″ dell'area $\sigma'$, nel quale la funzione $V_1(\xi, \eta)$ abbia un valore $H'' > H'$, si ha, in virtù della continuità, che un punto almeno di C′ deve far parte della linea $\Delta$.

Da quanto precede risulta intanto che farà certamente parte del luogo C′ una linea $\Gamma$ chiusa, abbracciante C.

Aggiungiamo che nessun altro punto del piano discosto da $\Gamma$ può far parte del luogo C′. Infatti nel caso contrario questo punto, secondo che si troverà nell'interno dell'area finita limitata da C e da $\Gamma$, o nell'interno dell'area infinita limitata da $\Gamma$, rappresenterà un punto, non facente parte del contorno, nel quale la funzione $V_1(\xi, \eta)$ piglia il suo valore massimo o minimo. Il che è impossibile.

Per la medesima ragione la linea $\Gamma$ non può intersecarsi in alcun suo punto.

Possiamo dunque concludere che *il luogo* C′ *è formato da una linea chiusa semplice, che non si interseca in alcun suo punto e che abbraccia la linea* C.

9. Indichiamo con $n'$ la direzione della normale nei punti di C′ rivolta verso l'area finita da essa racchiusa, e con $s'$ l'arco della curva C′.

Osserviamo che, essendo i punti di C′ discosti da C, le derivate prime di $V_1(\xi, \eta)$ lungo la linea C′ saranno finite e continue.

Ciò premesso, si consideri un punto $(\xi, \eta)$ qualsiasi interno all'area

piana finita $\sigma_1$ limitata da C e da C'. Applicando la formola di Green, si avrà:

$$V_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ \log r \frac{\overline{dV_1}}{dn} - V_1 \frac{d \log r}{dn} \right\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \left\{ \log r \frac{dV_1}{dn'} - V_1 \frac{d \log r}{dn'} \right\} ds'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ \log r \,.\, v_1(s) + H \frac{d \log r}{dn} \right\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \left\{ \log r \frac{dV_1}{dn'} - H' \frac{d \log r}{dn'} \right\} ds' ;$$

e poichè:

$$\int_C \frac{d \log r}{dn} ds = 0 \quad , \quad \int_{C'} \frac{d \log r}{dn'} ds' = -2\pi,$$

risulterà, in virtù della (8),

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \log r \frac{dV_1}{dn'} ds' + H'.$$

Posto allora:

$$v_1'(s') = -\frac{dV_1}{dn'},$$

si avrà che lo strato:

$$V_1'(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{C'} v_1'(s') \log r \, ds'$$

prende in tutti i punti dell'area finita limitata da C' (i punti di C' inclusi) il valore costante H'.

La formola (4), applicata all'area finita $\sigma_1$, ci darà poi:

$$-\int_C \frac{\overline{dV_1}}{dn} ds + \int_{C'} \frac{dV_1}{dn'} ds' = 0,$$

ossia:

$$\int_C v_1(s)\, ds - \int_{C'} v_1'(s')\, ds' = 0. \tag{13}$$

Si osservi che la differenza $V_1(\xi, \eta) - V_1'(\xi, \eta)$ prende nei punti di C' il valore *zero*; inoltre, in virtù delle (10), (11) e della (13), per $\varrho$ abbastanza grande essa si comporta come $\frac{1}{\varrho}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$; sicchè, in forza del teorema dimostrato al § 3, *dovrà aversi in tutta l'area infinita* $\sigma''$ *limitata da* C':

$$V_1(\xi, \eta) = V_1'(\xi, \eta).$$

10. *Si consideri una linea chiusa* $C_1$ *qualsiasi, tale che nei suoi punti non sia* $V_1(\xi, \eta)$ *uguale a costante.* Si indichi con $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ lo strato

distribuito lungo la linea $C_1$, avente nei punti di $C_1$ stessa un valore costante; e si determini la corrispondente densità $v_1^{(1)}(s_1)$ in modo che sia:

$$\int_C v_1(s)\, ds = \int_{C_1} v_1^{(1)}(s_1)\, ds_1 . \tag{14}$$

Dimostriamo che *non esiste alcuna linea* $C'$, *abbracciante le due linee* $C$, $C_1$, *nei punti della quale sia*:

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = \text{costante}.$$

Infatti, in virtù della (14), la funzione $V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ è armonica nel campo infinito $\sigma''$ limitato da $C'$; e quindi dovrebbe aversi in tutto il campo $\sigma''$ (i punti di $C'$ inclusi):

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0 .$$

Ora la funzione $V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta)$, essendo analitica in qualunque cerchio $\omega$ avente il centro in un punto qualsiasi di $\sigma''$ (in particolare di $C'$) e tutto discosto da $C$ e da $C_1$, sarebbe uguale allo *zero* in tutti i punti di $\omega$ e quindi ancora in tutti i punti dell'interno dell'area infinita $\sigma'''$ limitata da $C_1$ o da $C$ e $C_1$, secondo che la $C_1$ abbraccia o non abbraccia la linea $C$. Allora, in virtù della continuità, anche nei punti di $C_1$ dovrebbe aversi:

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0 ,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

11. Da ciò che precede *risulta l'esistenza di infinite linee speciali distinte.*

Infatti sia $C$ una linea chiusa qualsiasi, contenuta nell'interno di un cerchio $\Gamma$ di raggio 1, i cui punti siano discosti dalla circonferenza $\gamma$ di $\Gamma$. Scelta la corrispondente $v_1(s)$ positiva, il corrispondente strato semplice logaritmico $V_1(\xi, \eta)$ avrà su $C$ un valore costante negativo; per cui esisterà una linea $C'$ abbracciante $C$, nei cui punti sarà: $V_1(\xi, \eta) = 0$ Quindi, in virtù del teorema dimostrato al § 9, sarà $C'$ una linea speciale.

Ciò posto, si consideri una nuova linea chiusa $C_1$, contenuta nell'interno di $\Gamma$ e discosta da $\gamma$, e tale inoltre che nei suoi punti non sia: $V_1(\xi, \eta) = \text{costante}$. Indichiamo con $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ lo strato distribuito lungo la linea $C_1$ ed avente un valore costante nei suoi punti. Supposto di avere scelto il segno positivo per la corrispondente densità $v_1^{(1)}(s)$, avremo che il valore costante di $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ nei punti di $C_1$ sarà negativo; per cui esisterà una linea $C_1'$ abbracciante $C_1$, nei cui punti sarà $V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0$. Questa linea $C_1'$ sarà allora una linea speciale, la quale, in virtù del teorema dimostrato al § precedente, sarà distinta da $C'$.

Si consideri ora una linea chiusa $C_2$ nell'interno di $\Gamma$ e discosta da $\gamma$, e tale inoltre che nei punti di essa non sia nè $V_1(\xi, \eta) = \text{costante}$, nè

$V_1^{(1)}(\xi, \eta) =$ costante. Esisterà una corrispondente linea speciale $C_2'$, distinta da $C'$ e da $C_1'$.

Seguitando a ragionare nella medesima maniera, *risulterà appunto la esistenza di una serie infinita* $C', C_1', C_2', \ldots$ *di linee speciali tutte distinte*, corrispondenti alla serie indefinita $C, C_1, C_2, \ldots$ di linee chiuse scelte con la legge ora indicata.

## Proprietà delle linee speciali.

12. In virtù del risultato al § 7 si ha che una linea speciale qualsiasi non può abbracciare, nè essere abbracciata da una circonferenza di raggio 1. Più in generale qui vogliamo dimostrare che *una linea speciale qualsiasi non può mai abbracciare (o essere abbracciata da) un'altra linea speciale.*

Infatti, supponiamo che una linea speciale $C'$ possa essere abbracciata da un'altra linea speciale $C''$. Si considerino gli strati $V'(\xi, \eta)$, $V''(\xi, \eta)$, distribuiti rispettivamente su $C', C''$ ed aventi rispettivamente su queste linee valori nulli. Supponiamo determinate le corrispondenti densità $v'(s')$, $v''(s'')$ in modo che sia:

$$\int_{C'} v'(s')\, ds' = \int_{C''} v''(s'')\, ds''.$$

Allora l'espressione $V'(\xi, \eta) - V''(\xi, \eta)$ per $\varrho$ abbastanza grande si comporterà come $\frac{1}{\varrho}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$; per conseguenza essa rappresenterà nell'area infinita $\sigma_1'$ limitata da $C''$ una funzione armonica. Potremo quindi applicare la formola (5) del § 2, la quale ci darà:

$$\int_{C''} \left\{ V'' \overline{\overline{\frac{d(V' - V'')}{dn''}}} - (V' - V'') \overline{\overline{\frac{dV''}{dn''}}} \right\} ds'' = 0;$$

e poichè lungo $C''$ si ha:

$$V'' = 0 \;, \quad \overline{\overline{\frac{dV''}{dn''}}} = - v''(s''),$$

così si dovrà avere:

$$\int_{C''} V' . v'' . ds'' = 0.$$

Ora questa uguaglianza è impossibile; perchè la $v''(s'')$ nei punti di $C''$ non è identicamente nulla e nei punti stessi di $C''$ si ha:

$$V' > 0 \quad , \quad v'' \geq 0.$$

Da questo teorema risulta, come corollario, la seguente proposizione: *una linea* C *è certamente non speciale, se esiste una linea speciale che l'abbraccia o che è da essa abbracciata.*

13. Aggiungiamo ancora il seguente risultato: *Se per una linea qualsiasi* C *non speciale si sceglie*, come si è sempre fatto, *il segno positivo per la densità* $v_1(s)$ *del corrispondente strato* $V_1(\xi, \eta)$, si ha che *il valore costante di* $V_1(\xi, \eta)$ *nei punti di* C *è positivo o negativo, secondo che esiste una linea speciale* C′ *abbracciata da* C *o che abbraccia* C.

Infatti, sia C tale che esista una linea speciale C′ da essa abbracciata. Se il valore costante della corrispondente $V_1(\xi, \eta)$ fosse negativo, esisterebbe una linea speciale C″, la quale dovrebbe abbracciare C e quindi anche C′. Ciò che è impossibile.

Supponiamo ora che la linea C sia tale che esista una linea speciale C′ abbracciante C. Se il valore costante della $V_1(\xi, \eta)$, corrispondente alla linea C, fosse positivo, a *fortiori* dovrebbero essere positivi i valori di $V_1(\xi, \eta)$ nei punti di C′; ed allora, indicando con $V'(\xi, \eta)$ lo strato distribuito lungo la linea C′ ed avente valori nulli nei punti della C′ stessa, e supposta determinata la corrispondente densità $v'(s')$ in modo che sia:

$$\int_{C'} v'(s')\, ds' = \int_{C} v_1(s)\, ds,$$

avremo, ragionando come al § precedente, la seguente uguaglianza:

$$\int_{C'} V_1 \,.\, v'(s')\, ds' = 0,$$

che è assurda.

## Astronomia — *Osservazioni astrofisiche e fotografiche della cometa 1910* a, *eseguite nel R. Osservatorio di Catania.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

L'Accademia è già stata informata dal prof. Millosevich della scoperta e della posizione e corso della cometa, dedotti dalle osservazioni fatte nel R. Osservatorio al Collegio Romano. Ho l'onore di comunicare all'Accademia una Nota preliminare sulle osservazioni astrofisiche che abbiamo potuto fare all'Osservatorio di Catania nelle condizioni sfavorevoli causate dal chiarore del crepuscolo e poi anche da quello della luna, dalla brevità dell'intervallo fra il tramonto del sole e quello della cometa, ed inoltre dal tempo ostinatamente e singolarmente cattivo per Catania.

In seguito sarà pubblicato uno studio più completo delle dette osservazioni e delle fotografie fatte.