ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Alcune proprietà degli integrali di certe classi di equazioni differenziali.* Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Corrispondente ERNESTO PASCAL.

1. In una Nota testè pubblicata in questi Atti (¹), il prof. E. Pascal dimostra che le tangenti alle curve integrali dell'equazione $\frac{dy}{dx} = \mathrm{P}_n(y)$, ove $\mathrm{P}_n(y)$ è un polinomio di grado n in y a coefficienti funzioni di x, condotte per i punti aventi la medesima ascissa inviluppano una curva algebrica di ordine n.

Questo risultato si può riguardare come un caso particolare di una proposizione assai generale, che qui stabiliremo insieme con altre analoghe per gli integrali di certi sistemi di equazioni.

2. Sia

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^py}{dx^p}, \ldots \frac{d^ky}{dx^k}\right) = 0 \tag{1}$$

un'equazione differenziale d'ordine k, ove f si suppone simbolo di funzione continua in un campo C rispetto a tutti gli argomenti e di più razionale in $\frac{d^py}{dx^p}$ e $\frac{d^ky}{dx^k}$ con $0 \leq p < k$.

Sia data una famiglia di ∞^{n+1} curve piane rappresentata dall'equazione

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, a_1, a_2, \ldots a_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

razionale in X, Y e negli $n+1$ parametri a_1, a_2, a_{n+1} ove è $n \geq k$.

Se $x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(p-1)}, y_0^{(p+1)} \ldots, y_0^{(k-1)}$ sono k valori assegnati ad arbitrio (purchè contenuti nel campo C) si consideri la semplice infinità $\boldsymbol{\Gamma}_p$ di curve integrali di (1) soddisfacenti alle $k-1$ condizioni

$$y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0', \ldots \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = y_0^{(p-1)}, \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = y_0^{(p+1)}, \ldots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}$$

per $x = x_0$.

Or bene noi mostreremo che

l'inviluppo delle curve di (2) *osculatrici in* $x_0\, y_0$ *alle curve integrali* $\boldsymbol{\Gamma}_p$ *è una curva algebrica.*

(¹) E. Pascal, *Osservazione su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali,* Rend. della R. Accad. dei Lincei (5), t. 18, 1909, 2° semestre.

Colla nota regola di derivazione delle funzioni implicite si dedurrà dalla (2) derivando n volte

$$\frac{d^i Y}{dX^i} = F_i(X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

ove le F_i sono funzioni razionali in $X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}$. Indicheremo con $\overline{F}$ e con $\overline{F}_i$ ciò che diventano F e F_i quando si è posto $X = x_0$, $Y = y_0$.

Dall'equazione (1) si ottengono mediante $n - k$ derivazioni successive

$$\frac{d^{k+i}y}{dx^{k+i}} = f_i\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{k+i-1}y}{dx^{k+i-1}}\right) \qquad (i = 1, 2, \dots n - k),$$

ove le f_i sono ancora razionali in $\frac{d^py}{dx^p}$ e $\frac{d^ky}{dx^k}$; denoteremo con $\overline{f}_i$ ciò che diventa f_i quando si ponga

$$x = x_0, \; y = y_0, \; \frac{dy}{dx} = y_0', \dots \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = y_0^{(p-1)},$$
$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = y_0^{(p+1)}, \dots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}.$$

Infine denotiamo con $\overline{f}$ ciò che diviene f quando, oltre alle predette sostituzioni, si faccia $\frac{d^ky}{dx^k} = \overline{F}_k$.

Ciò posto, l'eliminazione degli $n + 1$ parametri $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ fra le $n + 2$ equazioni

$$F(X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}) = 0,$$

$$\overline{F} = 0, \overline{F}_1 = y_0' : \overline{F}_2 = y_0'', \dots \overline{F}_{p-1} = y_0^{(p-1)}, \overline{F}_p = \frac{d^py}{dx^p}, \overline{F}_{p+1} = y_0^{(p+1)} \dots$$

$$\dots \overline{F}_{k-1} = y_0^{(k-1)}, \overline{f} = 0, \overline{f}_1 = \overline{F}_{k+1}, \overline{f}_2 = \overline{F}_{k+2}, \dots \overline{f}_{n-k} = \overline{F}_n$$

porterà ad un'equazione

$$\Phi\left(X, Y, \frac{d^py}{dx^p}\right) = 0 \tag{3}$$

che per ogni valore c attribuito a $\frac{d^py}{dx^p}$ rappresenterà la curva di (2) osculatrice alla curva integrale di (1) della varietà Γ_p, corrispondente a $\frac{d^py}{dx^p} = c$.

La (3) è razionale nei tre argomenti. L'inviluppo delle curve (3) ha per equazione quella che risulta dalla eliminazione di α fra le due equazioni

$$\Phi(X, Y, \alpha) = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$$

avendo, per comodità, scritto α in luogo di $\frac{d^p y}{dx^p}$; e poichè essa equazione sarà razionale in X e Y, la proposizione enunciata è dimostrata completamente.

3. Come caso particolare, si supponga $p=0$, $k=1$ e per curve (2) si prendano le ∞^2 rette del piano. Allora l'equazione (1) sarà della forma

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=r}^{n} A_{rs}\, y^{s-r}\left(\frac{dy}{dx}\right)^r = 0, \tag{4}$$

ove A_{rs} sono funzioni di x o, in particolare, costanti. Un facile calcolo mostra che in questo caso la (3) diviene

$$\sum_{q=0}^{n}\sum_{h=0}^{q}\sum_{k=0}^{n-q}(-1)^k\binom{h+k}{k} A_{h+k,\,n-q+h}(X-x_0)^{n-q-k}\, Y^h y^q = 0. \tag{5}$$

L'inviluppo T delle tangenti alle curve integrali di (4) nei punti della retta $x=x_0$ ha per equazione il discriminante della (5) considerata come equazione algebrica di grado n in y, eguagliato a zero.

Se si osserva che i coefficienti delle potenze di y sono razionali interi in X e Y di grado n al più, si vede tosto che l'inviluppo T è una curva algebrica di ordine non superiore ad $n(2n-1)$.

L'ordine di T può essere inferiore a $n(2n-1)$: se la $\frac{dy}{dx}$ entra al massimo al grado m, l'ordine T sarà $m(2n-1)$ al più, essendo allora i coefficienti delle potenze di y al più di grado m in X e Y. Due sottocasi sono notevoli:

1°. La (4) è della forma

$$\sum_{k=0}^{m} A_k\left(\frac{dy}{dx}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} B_k\, y^k = 0 \qquad (m<n).$$

Se si calcola il discriminante in parola è facile vedere che il suo grado si riduce a $m(n+m-1)$. Basta fare $m=1$ per avere il caso studiato dal prof. Pascal.

2°. La (4) è della forma

$$\sum_{k=0}^{n} A_k\left(\frac{dy}{dx}\right)^k - \sum_{k=0}^{m} B_k\, y^k = 0 \qquad (m<n).$$

Allora i coefficienti di y^q nell'equazione, di cui si deve calcolare il discriminante, sono in X e Y di grado q per $0 \leq q \leq n-m-1$, o sono di grado n per $q > n-m-1$, quindi l'ordine dell'inviluppo T non supera

$$\frac{(n-m-1)(n-m)}{2} + (m+1)\,n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}.$$

4. Sia dato un sistema di due equazioni differenziali d'ordine k

$$(6)\qquad \begin{aligned} & f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}\right) = 0, \\ & \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}\right) = 0, \end{aligned}$$

ove le f e φ sono, in un determinato campo C, continue rispetto a tutti gli argomenti e razionali in $\frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}$, delle quali non può mancare la stessa in entrambe le equazioni, e razionali pure in una derivata d'ordine inferiore a k, ad es. in $\frac{d^p z}{dx^p}$.

Sia data una varietà di ∞^{2n+2} curve storte rappresentate dalle equazioni

$$(7)\qquad H(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}) = 0 \quad K(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}) = 0$$

razionali in $X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}$.

Se $x_0, y_0, z_0, y_0', z_0', \dots y_0^{(p-1)}, z_0^{(p-1)}, y_0^{(p)}, y_0^{(p+1)}, z_0^{(p+1)}, \dots y_0^{(k-1)}, z_0^{k-1}$ sono $2k$ valori fissati ad arbitrio in C, si consideri la semplice infinità $\Gamma_{p,z}$ di curve integrali del sistema (6) che soddisfano, per $x = x_0$, alle condizioni

$$(8)\qquad y = y_0, z = z_0, \frac{d^p y}{dx^p} = y_0^{(p)}, \frac{d^i y}{dx^i} = y_0^{(i)}, \frac{d^i z}{dx^i} = y_0^{(i)}$$

$$(i = 1, 2, \dots p-1, p+1, \dots k-1).$$

Allora sussiste la proposizione:

Le curve osculatrici in x_0, y_0, z_0 alle curve integrali $\Gamma_{p,z}$ appartengono ad una superficie algebrica.

Col derivare n volte le (7) rispetto ad X, si traggono le $2n$ derivate

$$\frac{d^i X}{dX^i} = \Phi_{yi}, \quad \frac{d^i Z}{dX^i} = \Phi_{zi} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

che sono funzioni razionali di $X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}$. In esse si faccia $X = x_0, Y = y_0, Z = z_0$ e si indichino le equazioni che ne risultano con $\overline{\Phi}_{yi} : \overline{\Phi}_{zi}$, come pure denotiamo con $\overline{H}, \overline{K}$ i primi membri delle (7) ove si sono fatte le stesse sostituzioni.

Col derivare le (6) $n-k$ volte rispetto ad x, si traggono le derivate

$$\frac{d^{k+i} y}{dx^{k+i}} = f_i, \quad \frac{d^{k+i} z}{dx^{k+i}} = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \dots n-k)$$

che sono funzioni razionali in $\frac{d^p z}{dx^p}, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}$. Indichiamo con $\overline{f}, \overline{\varphi}, \overline{f}_i, \overline{\varphi}_i$

ciò che divengono f, φ, f_i, φ_i quando si fa in esse $x = x_0$, $\frac{d^p z}{dx^p} = \overline{\Phi}_{zp}$ e le sostituzioni (8).

Allora l'eliminazione dei $2n + 2$ parametri $a_1, a_2, \dots a_{2n+2}$ fra le $2n + 4$ equazioni

$$\mathrm{H} = 0, \mathrm{K} = 0, \overline{\mathrm{H}} = 0, \overline{\mathrm{K}} = 0, \overline{f} = 0, \overline{\Phi}_{yp} = y_0^{(p)}, \overline{\Phi}_{zp} = \frac{d^p z}{dx^p}$$

$$\overline{\Phi}_{yi} = y_0^{(i)}, \overline{\Phi}_{zi} = z_0^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots p-1, p+1, \dots k-1)$$

$$\overline{\Phi}_{y, k+} = \overline{f}_r, \overline{\Phi}_{z, k+r} = \overline{\varphi}_r \qquad (r = 1, 2, \dots n-k)$$

porta a due equazioni

$$\Psi_1\left(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0 \quad , \quad \Psi_2\left(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0$$

che rappresentano, per ogni valore c di $\frac{d^p z}{dx^p}$, la curva di (7) osculatrice a quella curva di Γ_{zp} che corrisponde a $c = \frac{d^p z}{dx^p}$. Essendo le due equazioni razionali in $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \frac{d^p z}{dx^p}$, il luogo delle predette curve osculatrici è una superficie algebrica.

Per $p = 0$, si ha il corollario:

Le curve di (7) *osculatrici alle curve integrali* Γ_{0z} *soddisfacenti alle condizioni* $\frac{d^i y}{dx^i} = y_0^{(i)}, \frac{d^i z}{dx^i} = z_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots k-1)$ *che si appoggiano alla retta* $x = x_0, y = y_0$, *o ad una curva algebrica* $\theta(y, z) = 0$ *in un piano* $x = x_0$ *se le* (6) *sono razionali anche in* y, *o ad una curva algebrica qualunque* $\theta_1(x, y, z) = 0$, $\theta_2(x, y, z) = 0$ *se le* (6) *sono razionali anche in* x, *appartengono ad una superficie algebrica.*

Come caso particolare, se le (6) sono del primo ordine dei gradi m ed n rispetto ai tre argomenti z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ e dei gradi r ed s rispetto alle due derivate, le tangenti alle curve integrali appoggiantesi alla retta $x = x_0$, $y = y_0$ è una rigata di ordine $mr + ns$; e se le (6) sono lineari in z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ la rigata è una quadrica.

5. Infine dimostriamo la proposizione:

Le superfici della varietà di ∞^{n+1} *superfici*

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, a_1, a_2, \dots a_{n+1}) = 0, \tag{9}$$

ove F *è razionale in tutti gli argomenti, osculatrici agli integrali del sistema di equazioni differenziali di primo ordine*

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x\,,y\,,z)\ ,\ \frac{dz}{dx}=\varphi_1(x\,,y\,,z)\,, \tag{10}$$

che si appoggiano ad una retta $x=x_0\,,y=y_0$ *se* f *e* φ *sono razionali in* z, *o ad una curva algebrica* $\theta(y\,,z)=0$ *posta in un piano* $x=x_0$ *se* f *e* φ *sono razionali anche in* y, *o ad una curva algebrica qualunque* $\theta_1(x\,,y\,,z)=0$, $\theta_2(x\,,y\,,z)=0$ *se* f *e* φ *sono razionali anche in* x, *inviluppano una superficie algebrica.*

Dalle (10) si deducono per derivazione

$$\frac{d^iy}{dx^i}=f_i(x\,,y\,,z)\qquad \frac{d^iz}{dx^i}=\varphi_i(x\,,y\,,z)\qquad (i=2\,,3\,,\dots n)\,,$$

e dalla (9) ritenendo Z e Y funzioni di X si ottiene derivando n volte rispetto ad X

$$\mathrm{F}_i\left(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z}\,,\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\,,\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}}\,,\dots\frac{d^i\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^i}\,,\frac{d^i\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}^i}\,,a_1\,,a_2\,,\dots a_{n+1}\right)=0\quad (i=1\,,2\,,\dots n).$$

Si indichi con $\overline{\mathrm{F}}$ e $\overline{\mathrm{F}}_i$ ciò che divengono F e F_i quando si fa

$$\mathrm{X}=x_0\,,\mathrm{Y}=y_0\,,\mathrm{Z}=z\,,\frac{d^r\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^r}=f_r\,,\frac{d^r\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}^r}=\varphi_r\qquad (r=1\,,2\,,\dots i).$$

Allora se si elimina $a_1\,,a_2\,,\dots a_{n+1}$ fra le $n+2$ equazioni

$$\mathrm{F}=0\,,\overline{\mathrm{F}}=0\,,\overline{\mathrm{F}}_i=0\qquad (i=1\,,2\,,\dots n)$$

si ha un'equazione

$$\Psi(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z}\,,)=0$$

che rappresenta per ogni valore di z la superficie di (9) osculatrice alle curve integrali di (10) in un punto della retta $x=x_0\,,y=y_0$. L'inviluppo di codeste superficie ha per equazione, l'equazione algebrica in XYZ che nasce dall'eliminazione di z fra

$$\Psi=0\ ,\ \frac{\partial\Psi}{\partial z}=0.$$

In particolare i piani osculatori alle curve integrali di (10) appoggiantesi alla retta $x=x_0\,,y=y_0$, se f_1 e φ_1 sono lineari in y e z, inviluppano un cono quadrico.

Negli altri casi dell'enunciato, le dimostrazioni sono analoghe.