ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sopra speciali trascendenti che si connettono colle teorie dei numeri*. Noa di Enrico Zondadari, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica — *Sugli accelerometri a liquido*. Nota del dott. Emilio Oddone, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. Gli studî sismologici fatti recentemente dal prof. Lo Surdo, libero docente di Fisica terrestre nel R. Istituto di Studî superiori di Firenze, hanno destato tra gli specialisti vivo interesse e speranzosa aspettativa.

Dal luglio 1909 egli pubblicò quattro Note di sismologia dirette tutte allo scopo concreto della determinazione in misura assoluta dell'intensità dei macrosismi. Mi si permetta di ricapitolarle brevemente:

La prima Nota, intitolata: *Il funzionamento dei sismografi* (1) è una breve rassegna di orientamento sul problema sismografico. La seconda Nota dal titolo: *Sulle osservazioni sismiche* (2), pone il quesito se sia possibile che un sismografo registri direttamente l'accelerazione, anzichè, come si è tentato di fare finora, lo spostamento del suolo, e vi risponde affermativamente.

Mettendo l'integrale generale, dell'equazione completa

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega, \tag{1}$$

sotto la forma:

$$a = \frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{\omega}{\tau}\, t\right) + \frac{1}{\beta^2}\,\frac{\omega}{\tau}\left[\left(\frac{2}{\beta} + t\right) e^{-\beta t} - \frac{2}{\beta}\right] \tag{2}$$

ottiene un primo termine che dà in ogni istante lo spostamento che corrisponde esattamente al valore dell'accelerazione e rappresenta la soluzione idealmente perfetta del problema; ed un secondo termine, che ha per causa il periodo proprio del sistema oscillante. Quest'ultimo perturba; talchè converrà fare assumere ad esso un valore piccolissimo.

Per ciò β dev'essere tanto più grande quanto più grande è il valore di $\frac{\omega}{\tau}$. È bensì vero dice l'A. che aumentando β, diminuendo cioè il pe-

(1) Il Nuovo Cimento, 1909, pag. 129.

(2) Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, fasc. 6°, sec. sem. 1909. Anche il Nuovo Cimento, 1909, pag. 201.

riodo proprio del sistema oscillante non smorzato $T = \frac{2\pi}{\beta}$, si viene a diminuire la sensibilità, data da $\frac{1}{\beta^2}$, ma si vede subito che la parte perturbatrice (secondo termine) al crescere di β tende più rapidamente a zero che non lo spostamento idealmente perfetto della massa (primo termine).

E continua: *nei sismografi, quando si vuole che la registrazione rappresenti il più fedelmente possibile l'andamento dell'accelerazione sismica, bisogna che il periodo proprio del sistema oscillante sia il più piccolo possibile.* È questa una prima condizione perchè nell'equazione differenziale due termini tendano a sparire, e l'accelerazione sismica divenga semplicemente proporzionale allo spostamento della massa inerte. Per rimediare alla già accennata difficoltà, che se si diminuisce il periodo proprio viene a diminuire la sensibilità, suggerisce di applicare un fortissimo ingrandimento. Termina facendo notare che i sismologi scelgono invece il periodo proprio dei sismografi molto grandi, per cui ottengono curve che non rappresentano nè lo spostamento, nè l'accelerazione.

In una terza e quarta Nota dal medesimo titolo (¹), l'autore dà il principio del nuovo strumento che deve realizzare le condizioni fondamentali di possedere lo smorzamento critico ed avere piccolo il periodo proprio per via del fortissimo ingrandimento. L'apparecchio, destinato ai soli macrosismi, è a liquido e si basa sull'effetto della pressione idrostatica dovuta all'inerzia. L'apparato inteso alla determinazione di una delle componenti orizzontali, consiste in un tubo orizzontale rigidamente collegato al suolo, tubo che termina da una parte e dall'altra in due sottili tubulature ad angolo retto. Esso contiene una colonna liquida imprigionata, la quale sotto gli impulsi del suolo in moto, imparte per inerzia un movimento di va e vieni alle due colonnine liquide verticali. Il sistema potrà portarsi allo smorzamento critico grazie alla possibità di variare la lunghezza e quindi la resistenza al moto del liquido nei tubi capillari; il periodo proprio potrà portarsi ad essere il più piccolo possibile, essendo in facoltà dell'esperimentatore di aumentare il rapporto delle sezioni dei vasi comunicanti.

Per la determinazione della componente verticale, la colonna è in piedi, sostenuta dalla pressione di un gas racchiuso in apposito bulbo.

La quarta Nota rileva l'arbitrarietà ed i difetti delle scale sismiche in uso e torna a raccomandare gli accelerometri a liquido, i quali senza richiedere grandi mezzi e cognizioni speciali rendono possibile la determinazione dell'intensità di un terremoto in valore assoluto, mediante la relazione semplicizzata:

$$\Omega = \beta^2 a .$$

(¹) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, fascicolo 10°, sec. sem. 1909 e vol. XIX, fasc. 1°, primo sem. 1910. Anche il Nuovo Cimento, vol. XVIII, fasc. 11° e 12°, 1909.

La Nota si chiude col dare le caratteristiche di alcuni modelli costruiti e coll'accennare che da zero a duecento unità c. g. s. la verifica sperimentale confermò le conclusioni teoriche.

2. L'oggetto della presente Nota è di discutere la teoria degli apparati sismici sopradescritti.

Il prof. Lo Surdo nel dare la teoria dei suoi apparecchi (per es. quello orizzontale della fig. 3ª, Rend. R. Acc. dei Lincei, Vol. XVIII fasc. 10 pag. 440) attribuisce alla pressione antagonista per lo spostamento unitario il valore $2n\sigma g$; fa eguale ad $L\sigma$ la massa per unità di sezione; dà eguale a $\frac{2ng}{L}$ la corrispondente accelerazione antagonista; assegna il valore

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2ng}}$$

al periodo proprio del sistema non smorzato e quello $\frac{L}{2g}$ alla sensibilità del sistema. L è la lunghezza del tubo orizzontale; n è il rapporto d'ingrandimento dei vasi comunicanti; σ è la densità del liquido. Infine, conforme al principio teorico che il periodo proprio del sistema oscillante non smorzato deve essere il più piccolo possibile, suggerisce di aumentare l'ingrandimento n, con che, secondo lui, *aumentando il rapporto delle sezioni, possiamo impicciolire il periodo senza diminuire la sensibilità.*

Vediamo se queste affermazioni sono esatte ed incominciamo dal valore del periodo proprio del sistema non smorzato.

Consideriamo l'apparato della detta fig. 3ª e scegliamo una posizione intermedia in cui il livello in ogni tubetto di sezione s disti di x dalla posizione di equilibrio. Il dislivello fra i tubetti sarà $2x$ e per uno spostamento infinitamente piccolo dx, la forza motrice $\sigma gs2x$, compirà un lavoro $\sigma gs2xdx$. A parte i vortici e la dissipazione nel cambiamento improvviso di sezione, l'equazione di continuità dice che $sV = Sv$, essendo v la velocità nel tubo orizzontale di sezione S, V quella nei tubetti di sezione s.

Sia H la distanza verticale dal centro di figura di detto tubo al menisco dei tubetti quando il liquido è in equilibrio statico. L'energia cinetica del sistema è

$$E = \frac{2Hs\,\sigma\,.\,V^2}{2} + \frac{LS\,\sigma\,.\,\frac{V^2}{n^2}}{2}$$

E se al tempo t una delle colonnine è cresciuta di x, e l'altra diminuita di altrettanto, l'energia potenziale è

$$U = \frac{H + x}{2}(H + x)s\,\sigma\,g + \frac{H - x}{2}(H - x)s\sigma g + U_0 = (H^2 + x^2)s\,\sigma g\,.$$

Applicando l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0\,,$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(2\mathrm{H}s\sigma+\frac{\mathrm{LS}\sigma}{n^2}\right)\mathrm{V}+2xs\,g\sigma=0\,,$$

e riducendo

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2g}{2\mathrm{H}+\frac{\mathrm{L}}{n}}x\,,$$

e quindi

$$\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g}+\frac{\mathrm{L}}{2ng}}\,.$$

Paragonata quest'ultima formula con quella del prof. Lo Surdo vediamo che ne differisce pel termine sotto il radicale $\frac{\mathrm{H}}{g}$.

Questo termine ha tutt'altro che una importanza secondaria, non potendo mai annullarsi completamente e precisando il periodo minimo sotto il quale non può discendere T per quanto grande diventi n. Dei due $\frac{\mathrm{H}}{g}$ è il termine grande, $\frac{\mathrm{L}}{2ng}$ è il termine piccolo, e se mai quest'ultimo era il termine che potevasi trascurare [1].

Ciò dimostrato, richiamiamo il suggerimento caposaldo nel lavoro del prof. Lo Surdo che aumentando il rapporto delle sezioni si possa impicciolire a piacimento il periodo senza diminuire la sensibilità. Vedremo tosto che la diminuzione non è più di un ordine da corrispondere al suo scopo. Prendiamo ad es. tre apparecchi a tubo orizzontale aventi eguali dimensioni ($\mathrm{L}=49$ cm, e $2r=3$cm), e le sezioni dei tubetti così che nell'uno n valga 10 e negli altri 100 e 200. Le altezze dell'*acqua* nei tre apparecchi siano

[1] Nel frattempo è apparsa nei Comptes Rendus, tom. 150, n. 7, pag. 363, 1910, una Nota del prof. Lippmann dal titolo: *sismographe à colonnes liquides*. Il principio teorico è ancora quello noto della possibilità di avere gli spostamenti rapidi del suolo quando il periodo proprio del sistema è il più grande possibile rispetto al periodo dei moti sismici. Per avere periodi grandi, suggerisce un apparecchio simile, ma inverso a quello del prof. Lo Surdo. Facendo grande la sezione dei tubi verticali e chiamandola S e facendo piccola quella s del tubo orizzontale, l'espressione $\frac{l}{2gn}$ si cambia in $\frac{ln}{2g}$; la quale spiega come i periodi possano diventare molto grandi fino a 141 sec. e più. Dei due termini sotto il radicale, che anche nel caso Lippmann entrano nell'espressione di T, è però $\frac{ln}{2g}$ il termine grande e $\frac{\mathrm{H}}{g}$ il termine piccolo, per cui rispetto a quello, è lecito trascurare $\frac{\mathrm{H}}{g}$; e così ha fatto il prof. Lippmann.

eguali. Per quanto cerchiamo di metterci nelle condizioni più favorevoli di un H molto piccolo, non potremo avere H guari più corto di 7 cm. altrimenti per poco che a sia superiore ai 0,03 cm., nel caso del maggior ingrandimento, la colonnina rientrerebbe nel tubo e con essa dell'aria. Secondo la formula del prof. Lo Surdo il periodo sarebbe di $0^s,3$ quando l'ingrandimento è di 10, e $0^s,1$ e $0^s,07$ quando l'ingrandimento è rispettivamente di 100 e 200. Questo rapido decrescimento di T, che porta ad un rapido aumento di β, permetterà forse di trascurare il secondo termine dell'integrale generale (2). Però dalla mia formula il periodo viene da due a dieci volte tanto, precisamente di $0^s,6$ coll'ingrandimento di 10 e $0^s,5_4$ e $0^s,5_3$ cogli ingrandimenti di 100 e 200. La riduzione del periodo al crescere dell'ingrandimento n, è poco sensibile. Fosse H eguale a 20 cm. i valori assoluti dei periodi ($0^s,9_7$; $0^s,9_2$; $0^s,9_2$) sarebbero notevolissimi, per nulla inferiori a quelli che assume il suolo scosso da terremoto (in generale non superiori ad 1 sec.) e il loro decremento sarebbe di appena $0^s,05$! [1].

Queste cifre calcolate vennero trovate in accordo con alcune determinazioni dirette del periodo d'oscillazione del liquido in un tubo ad U che aveva le costanti sopraindicate ed un ingrandimento di circa 228. Vero è che qui si aveva a fare con oscillazioni smorzate per via dell'attrito interno, però di una notevole influenza di esso attrito io non mi accorsi: con 18 cm. di acqua nei tubetti il liquido oscillava a 55° con periodo non gran che diverso da quello coll'acqua a 20°, quantunque l'attrito a freddo (0,01) fosse doppio dell'attrito a 55° (0,005).

Dopo ciò è quasi superfluo il dire che diminuendo di poco il T, crescerà di poco il β, per cui è da dubitare che il secondo termine della (2) sparisca, e quindi rimane pure dubbioso che lo spostamento a sia legato al valore dell'accelerazione dalla semplice relazione $\beta^2 a = \Omega$.

Nemmeno la sensibilità (spostamento dei menischi nei rami verticali per unità di accelerazione) sarà indipendente da H. La teoria dice che per uno stesso spostamento della tavola oscillante, il fattore della sensibilità a diminuisce al crescere del periodo che assume il sistema [2]; dovrà dunque diminuire al crescere di H.

(1) Che se poi gli stessi apparecchi conservano inalterata la massa d'acqua, nella supposizione che per l'ingrandimento 10, sia H eguale a 2 cm., vengono pei rispettivi ingrandimenti di 10, di 100 e di 200, tre periodi teorici eguali a $0^s,4$; $0^s,9$ $1^s,3$ ossia T anzichè diminuire al crescere dell'ingrandimento, andrebbe aumentando.

(2) Questa proposizione si dimostra graficamente descrivendo su due sistemi coordinati due curve $a = f(t)$ di diverso periodo e sovrapponendo loro le curve integrali semplici e doppie: $\int adt$ e $\int dt \int adt$. La somma delle tre ordinate dà ad ogni istante lo spostamento x della tavola oscillante e si vede che nella curva a periodo maggiore, a parità di x corrispondono gli a minori.

Il citato professore dice che fino a 200 unità c. g. s. trovò buon accordo tra i valori di $\beta^2 a$ ed i valori dell'accelerazione sperimentalmente determinati alla tavola oscillante. Come si spiega quest'accordo se in via generale la relazione non è valida? Facciamo la congettura che ciò possa dipendere dalle condizioni casuali e speciali in cui avrà operato l'A. Vi è infatti un caso nel quale la relazione $\frac{2ng}{L}a = \Omega$ sembra avverarsi, ma non è quando per $\alpha = \beta$ il periodo proprio del sistema non smorzato è il più piccolo possibile, ma bensì quando detto periodo sta prossimo al periodo della tavola oscillante. La tabella seguente dà il risultato di alcune osservazioni provvisorie, secondo le quali, dando alla tavola un moto orizzontale di periodo eguale a quello proprio del liquido nel tubo e variando l'ampiezza di moto della tavola oscillante, la proposizione del prof. Lo Surdo circa vale.

Apparato orizzontale con ingrandimento di circa 228:

$H = 4^{cm},5$ T suolo = T proprio del sistema non smorzato $= 0^s,4$ circa.

x	$\frac{4\pi^2 x}{T^2}$	$\frac{2g}{L} . na$	na
cm.			cm.
0.1_1	27 cm. gr. sec.	29 cm. gr. sec.	0.7
0.1_7	60 "	63 "	1.4
0.4_5	150 "	125 "	2.9

L'eguaglianza approssimata dei rispettivi valori di $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ e $\frac{2g}{L} na$ si può porre sotto la forma:

$$\frac{4\pi^2 x}{4\pi^2 \frac{2nH + L}{2ng}} = \frac{2g}{L} na$$

da cui

$$\frac{x}{a} = \frac{2nH + L}{L}$$

che dovrebbe fornire la spiegazione teorica del fatto. I moti del suolo e del sistema sono in opposizione e lo spostamento del suolo sta allo spostamento del liquido nel tubo nel rapporto delle inerzie per unità di sezione: la totale $2nH + L$ e la parziale L del tubo orizzontale.

Ma all'infuori di alcuni casi speciali, riteniamo che nel caso generale dei macrosismi che non hanno il periodo proprio dell'apparecchio, non sussista la relazione del prof. Lo Surdo. È piuttosto prevedibile che se il periodo del suolo sarà maggiore del periodo proprio del sistema, il metodo Lo Surdo darà dei valori dell'accelerazione in eccesso [1], se il periodo del suolo sarà minore di quello del sistema ed indurrà delle oscillazioni forzate, il metodo stesso darà dei dati in difetto. Eccone alcuni esempî ottenuti coll'apparato orizzontale con ingrandimento eguale a 228.

Per H = 4 cm.; T proprio $= 0^s,4$; T suolo $= 0^s,2$; per $x = 0^{cm},7$ viene Ω cinque volte maggiore dell'Ω dedotto dalla formola $\frac{2g}{L}na$. Per H $= 4^{cm},5$; T proprio $= 0^s,4$; T suolo $= 0^s,6$; per $x = 0^{cm},4_5$ viene Ω sperimentale metà dell'Ω dedotto dall'apparato e dalla relazione Lo Surdo. Per H = 7 cm.; T proprio $= 0^s,5$; T suolo $= 0^s,2$; per $x = 0^{cm},2$ viene l'Ω sperimentale nove volte maggiore dell'Ω ricavato dall'apparecchio.

Le altezze sono state scelte così da avvicinarsi alle condizioni di aperiodicità date dalla $\alpha = \beta$.

Geologia. — *Osservazioni morfologiche sull'alto bacino del Noce (Tirreno).* Nota del dott. R. Almagià, presentata dal Socio G. Dalla Vedova.

Il tronco superiore della vallata del Noce, a monte di Trècchina, a chi lo abbracci tutto quanto dall'alto di uno dei monti che lo circondano, p. es. dalle vette del Sirino, sembra a primo aspetto un bacino chiuso. A nord lo rinserra la dorsale formata dalla Serra Malombra (1332 m.), dalla Rocca Rossa (1412 m.), dalla Serra della Secchia, dalla Serra dell'Alto (1207 m.) e dal M. Cervaro (1170 m.), ad est la cresta del Sirino (M. del Papa 2007 m.) con quella sua propaggine meridionale che forma la Costa della Neviera, poi la Serra Rotonda (1288 m.), il Castello di Starsìa (1401 m.) il M. La Spina (1649 m.), i monti che recingono il Campo del Galdo (un bacino carsico di cui parleremo più avanti), la Serra del Monaco e la dorsale che termina col M. Messina (1027 m.); ad ovest la Serralunga (1483 m.), il M. Coccovello (1512 m.), la Serra della Grotta (1288 m.) e la Serra Pollino (1093 m.). Soltanto verso l'angolo sud il Noce si è aperto un passaggio tra i ripidi fianchi del M. Messina e la scoscesa parete della Serra Pollino, e, inoltrandosi in una gola angusta e selvaggia, esce in piano e si avvia verso il Tirreno. In altri tre punti la chiostra dei monti è poi profondamente intaccata: ad ovest nella sella Vascelli (632 m.) a nord del M. Coccovello, per cui passa la strada nazionale Lagonegro-Sapri, più a sud nel passo della Colla (605 m.) tra il M. Coccovello e la Serra della Grotta, per cui passa

(1) L'espressione $\frac{2g}{L}na$ diminuisce al crescere di T perchè na si fa piccolo, ma l'altra espressione $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ diminuisce più rapidamente per via del T quadrato al denominatore.