ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

sopra dette distinzioni cronologiche sono da considerare come affatto arbitrarie. Come transazione d'idee, se pur sia lecito farne in simili circostanze, ritenni io pure in addietro possibilmente triassici i Calcari e le Anidriti delle zone più cristalline: ma ora di tale transazione faccio ammenda.

Io ritengo ora che i terreni entroalpini predetti appartengano tutti a varie età del Prepaleozoico.

Certo negli ultimi tempi con le carte topografiche nuove lodevolmente precise almeno nel segnare il limite dei terreni, si sono fatti nelle Alpi Occidentali e nella stessa regione del Sempione rilevamenti geologici molto minuziosi e più accurati.

Ma l'età dei *Bündner Schiefer* quale si vede riprodotta nelle Carte Svizzere ed Italiane è ancora una età geologica mitica che ricorda l'età del *Macigno* nell'Appennino, cioè l'età nella quale tutti i terreni dell'Appennino erano insaccati col nome di *Macigno* e ritenuti antichi. Anche questo sotto varî punti di vista è piuttosto un regresso che un progresso.

Un attento studio comparativo con qualsiasi delle regioni confinanti assai fossilifere aprirà nuovi orizzonti alla determinazione cronologica dei terreni, e da ciò verranno avviate a nuova e più sicura via la stratigrafia e la geotettonica delle Alpi Occidentali.

Quanto alla regione del Sempione io l'ho trovata, per mio conto, ripeto, piuttosto semplice ed assai più regolare di tante e tante parti delle stesse Alpi Occidentali, di quelle Orientali e dell'Appennino.

Matematica. — *Sopra speciali trascendenti che si connettono colla teoria dei numeri.* Nota di Enrico Zondadari, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

In questa Nota mi propongo di studiare un prodotto infinito che rappresenta una funzione analitica dotata di particolari proprietà aritmetiche relativamente all'ordine di multiplicità delle sue radici e per mezzo della quale facilmente si costruisce un'altra funzione che dà, eguagliata a zero, un'equazione caratteristica dei numeri primi; questa seconda funzione presenta una certa analogia con le funzioni $k(x)$ e $K(x)$ date da von Koch nella Nota: *Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée* (Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s., t. CXVIII, pag. 850, 1894) la qual Nota è riassunta con alcune modificazioni nella monografia del prof. Torelli *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (Napoli, 1901).

Tuttavia mi è sembrato non inutile far conoscere questa nuova equazione caratteristica dei numeri primi perchè, mentre le equazioni del von Koch ammettono oltre ai numeri primi anche radici non intere, l'equazione

da me ottenuta non ha in tutto il piano complesso altre radici che i numeri primi positivi e negativi. D'altra parte potrebbe essere che tanto questa equazione quanto la funzione rappresentata dal prodotto infinito suddetto, le quali nella forma attuale non hanno se mai altro che un valore teorico, possano tuttavia servire come punto di partenza per nuove ricerche che conducano a risultati di maggiore interesse per la teoria dei numeri e che presentino qualche utilità pratica nello studio dei numeri primi.

1. Consideriamo il prodotto infinito

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}}{\frac{\pi x}{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \ldots ;$$

dimostreremo che esso converge assolutamente ed uniformemente entro qualunque cerchio di raggio grande a piacere col centro nell'origine e rappresenta una funzione analitica olomorfa le cui radici sono tutti e soli i numeri interi positivi e negativi (lo zero escluso) ciascuno con un grado di multiplicità uguale al numero dei suoi divisori compreso se stesso e l'unità.

Prendiamo infatti a considerare un cerchio C di raggio ϱ comunque grande ma determinato avente il centro nell'origine. Sia n_0 il più piccolo numero intero positivo per cui si ha $n_0 > \varrho$. Ogni fattore $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}}$ per $n \geq n_0$ e $|x| \leq \varrho$ sarà sempre diverso da zero; è inoltre soddisfatta la prima condizione $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} = 1$ necessaria per la convergenza del prodotto. Il prodotto infinito può dunque spezzarsi nel prodotto finito

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0 - 1}}{\frac{\pi x}{n_0 - 1}},$$

e nel prodotto infinito

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0}}{\frac{\pi x}{n_0}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0 + 1}}{\frac{\pi x}{n_0 + 1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \cdot \ldots ,$$

che ha tutti i suoi fattori finiti e diversi da zero entro C.

È noto che il prodotto infinito (3) convergerà assolutamente ed uniformemente nel cerchio C se ivi converge in egual grado la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} - 1 \right|, \qquad |x| \leq \varrho < n_0 .$$

Si ha ora identicamente

$$(4) \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} - 1 \right| = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} \right| .$$

Ma dallo sviluppo

$$\frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} = \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi x}{n} \right)^3 - \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi x}{n} \right)^5 + \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi x}{n} \right)^7 - \cdots$$

si trae che per $\left| \frac{\pi x}{n} \right|$ sufficientemente piccolo

$$(5) \qquad \left| \frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} \right| < \alpha \left| \frac{\pi x}{n} \right|^3 ,$$

essendo α un numero qualunque positivo maggiore di $\frac{1}{3!}$.

Fissato $\alpha > \frac{1}{3!}$ può dunque trovarsi un valore finito m_0 dell'indice n tale che per $n \geq m_0$ sia entro C sempre soddisfatta la (5). La serie

$$(6) \qquad \sum_{n=m_0}^{\infty} \alpha \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} \right|^3$$

avrà quindi i suoi termini maggiori dei termini corrispondenti della serie

$$\sum_{n=m_0}^{\infty} \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} \right|$$

che si ottiene dalla (4) sopprimendovi un numero finito di termini.

Ma

$$\sum_{n=m_0}^{\infty} \alpha \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} \right|^3 = \alpha \pi^2 |x|^2 \sum_{n=m_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} ,$$

e poichè la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ è convergente, tale è anche la (6) e quindi, per un noto teorema, la (4) converge uniformemente dentro C.

Poichè le espressioni $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} - 1$ rappresentano funzioni analitiche ad un sol valore qualunque sia n, si può affermare per noti teoremi che il prodotto infinito (3) rappresenta entro C una funzione analitica ad un sol valore che si manterrà ivi sempre finita e diversa da zero a causa della convergenza della (4).

Il prodotto completo

$$P(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \cdot \ldots$$

rappresenta dunque una funzione analitica olomorfa, la quale si annulla entro C per uno qualunque dei valori che annullano il prodotto finito $\operatorname{sen}\pi x \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0 - 1}$, eccezion fatta per $x = 0$ e solo per tali valori. La funzione $P(x)$ avrà dunque entro C una radice semplice per $x = \pm 1$, una radice doppia per x uguale ad un numero primo (positivo o negativo), una radice multipla d'ordine $\mu > 2$ per x uguale ad un numero composto (positivo o negativo) avente μ divisori compreso se stesso e l'unità, perchè facendo x uguale ad un intero k minore in valore assoluto di n_0 nel prodotto finito $\operatorname{sen}\pi x \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0 - 1}$, si annullano semplicemente tutti e soli quei fattori $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}$ nei quali n divide esattamente k; per ogni altro valore di x ciascuno dei fattori $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}$ e quindi il prodotto resta diverso da zero; per $x = 0$ avendosi $\lim_{x=0} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} = 1$, qualunque sia n, al prodotto infinito deve attribuirsi il valore 1. Poichè tutto ciò vale comunque grande sia stato assunto il raggio ϱ del cerchio C restano pienamente dimostrate la convergenza e le proprietà enunciate del prodotto infinito (1).

2. Per mezzo del prodotto infinito $P(x)$ possiamo ora costruire la funzione meromorfa

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 \pi x}{(\pi x)^3 (1 - x^2)^2} \cdot \frac{1}{P(x)}$$

ossia scrivendo per disteso e riducendo

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{(\pi x)^2 (1 - x^2)^2} \left\{ \frac{\pi x}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi x}{3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\pi x}{n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}} \cdot \ldots \right\}$$

avente per sole radici tutti i numeri primi positivi e negativi.

Infatti la funzione analitica definita dal quoziente

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{(\pi x)^2 (1 - x^2)^2}$$

è uguale all'unità per $x = 0$, ha un valor finito diverso da zero per $x = \pm 1$, ha una radice doppia per ogni altro numero intero positivo o negativo, ed è diversa da zero e finita per qualsiasi altro valore finito della x; la funzione

$$Q(x) = \frac{\pi x}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi x}{3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\pi x}{n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}} \cdot \ldots = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} \frac{1}{P(x)}$$

è uguale all'unità per $x = 0$, ha un polo d'ordine $\mu - 1$ per ogni valore intero positivo e negativo della x diverso da ± 1 che ammette μ divisori compreso se stesso e l'unità, è diversa da zero e finita per $x = \pm 1$, come si deduce immediatamente dalle proprietà studiate della funzione $P(x)$. Poichè dunque soltanto per x uguale ad un numero primo la funzione $Q(x)$ ha un polo del primo ordine, resta dimostrato che la funzione $g(x)$ ha le proprietà sopra enunciate e ci fornisce quindi, uguagliata a zero, una equazione caratteristica dei numeri primi.

3. Per noti teoremi è facile riconoscere che il prodotto infinito $P(x)$ può derivarsi colla regola ordinaria di derivazione dei prodotti. Eseguendo i calcoli si ottiene per la derivata di $P(x)$ l'espressione

$$P'(x) = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} \right) \right].$$

Dal teorema di Cauchy sui residui si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(x)}{P(x)} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} \right) \right] dx = M ,$$

essendo M la somma dei numeri μ che rappresentano quanti divisori ha ogni numero intero positivo e negativo contenuto entro un cerchio C col

centro nell'origine e lungo la circonferenza γ del quale si intende fatta l'integrazione.

Se consideriamo un numero qualunque p intero positivo avente μ divisori e due cerchi C_1 e C_2 di raggio ϱ_1 e ϱ_2 rispettivamente, col centro nell'origine e tali che si abbia

$$p-1<\varrho_1<p \quad , \quad p<\varrho_2<p+1 ,$$

avremo (poichè nella corona circolare compresa fra le circonferenze γ_1 e γ_2 di C_1 e C_2 cadono le radici p e $-p$ di $P(x)$)

$$\mu=\frac{1}{4\pi i}\left\{\int_{\gamma_2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx-\right.$$
$$\left.-\int_{\gamma_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx\right\}.$$

Se C_3 è un cerchio di raggio $\varrho_3<1$ avente il centro nel punto indice del numero p avremo

$$\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx .$$

In particolare per p primo avremo le formole

$$\frac{1}{4\pi i}\left\{\int_{\gamma_2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx-\int_{\gamma_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx\right\}=2$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx=2 .$$

Le funzioni $P(x)$ e $g(x)$ possono mettersi sotto altre forme valendosi della funzione Γ di Eulero e dello sviluppo del seno in prodotto infinito. Inoltre se ci proponiamo di sviluppare la funzione $P(x)$ in serie di potenze intere e positive di πx, troviamo calcolando i primi coefficienti che essi si esprimono in funzione delle somme σ_{2t} delle serie

$$\sigma_{2t}=1+\frac{1}{2^{2t}}+\frac{1}{3^{2t}}+\cdots+\frac{1}{n^{2t}}+\cdots ; \qquad (t=1,2,3,\ldots,m,\ldots)$$

queste somme possono calcolarsi come è noto colla formula

$$\sigma_{2t}=(-1)^{t-1}\frac{2^{2t-1}B_{2t}\pi^{2t}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots 2t}$$

ove le B_{2t} sono i numeri bernoulliani d'indice pari. Ma noi non possiamo ora trattenerci su questo.