ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali.* Nota di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si consideri nello spazio una congruenza rettilinea, e si indichino con $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ i coseni direttori del generico raggio r passante pel punto (x, y, z). La congruenza sia tale che in ogni punto, del campo che si considera, sia verificata la condizione

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (1)$$ [1].

Essa dà luogo alla seguente interpretazione geometrica.

Preso a considerare un tubo infinitamente sottile, costituito da rette della congruenza, lunghesso si mantiene costante l'area della sezione normale. Profittando di una denominazione, notoriamente usata in questioni fisico-matematiche, chiameremo una tale congruenza *solenoidale*.

Mi propongo di far vedere in una prossima Nota come l'intervento di congruenze rettilinee solenoidali si renda necessario in una certa questione idrodinamica. Per ora mi basta di caratterizzarle geometricamente. Ecco il risultato cui si è in definitiva condotti.

Assunta ad arbitrio, nello spazio, una linea si prenda a considerare il fascio de' suoi piani osculatori e sopra ciascuno d'essi il sistema delle parallele alla rispettiva tangente. Un così fatto sistema di rette costituisce una congruenza rettilinea solenoidale; reciprocamente qualsiasi congruenza rettilinea solenoidale si può risguardare generata in tal guisa.

1. Vediamo anzitutto di caratterizzare analiticamente la questione.

Sia σ una superficie che taglia (in un intorno generico) l'intero sistema di rette della congruenza. Riferiti i punti della superficie ad un sistema di coordinate curvilinee (u, v), la congruenza rimane definita, com'è ben noto [2], esprimendo in funzione di u, v le coordinate x, y, z dei punti di σ ed i coseni direttori X, Y, Z delle rette della congruenza. Si ammette che le sei funzioni x, y, z; X, Y, Z di u, v sieno finite e continue assieme alle loro derivate parziali.

Diciamo O il punto di incontro della generica retta r con σ; allora se t rappresenta l'ascissa di un punto P di r, contata sul raggio stesso a

[1] Conveniamo di attribuire al simbolo Σ, senz'altra designazione, il significato di somma rispetto alle lettere.

[2] Cfr. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spoerri, 1902), vol. I, pp. 297-298.

partire dal punto O, avremo per le coordinate di P le espressioni seguenti:

(2) $$x + tX \,,\; y + tY \,,\; z + tZ .$$

Qualora si risguardi la t come funzione assegnata delle variabili u, v le (2) stesse definiscono, sotto forma parametrica, una superficie τ.

Posto

(3) $$\begin{cases} a_{11} = \sum \left\{ \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial u} \right\}^2 , \\ a_{22} = \sum \left\{ \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial v} \right\}^2 , \\ a_{12} = \sum \left\{ \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial v} \right\} , \end{cases}$$

e

(4) $$a = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 ,$$

a è il discriminante della forma differenziale quadratica che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della superficie τ.

Per l'elemento d'area si ha

(5) $$d\tau = \sqrt{a}\, du\, dv .$$

Ciò posto, vediamo di introdurre la condizione (1), caratteristica per le congruenze solenoidali.

Scelto sopra τ un contorno chiuso C, i raggi della congruenza spiccati dai diversi punti di questo contorno formano un *tubo* (tubo di forza nel caso in cui i raggi della congruenza fossero linee di forza). Immaginiamo che il tubo abbia una sezione infinitamente piccola e sia $d\tau$ la porzione di superficie τ staccata dal tubo infinitesimo; se α, β, γ designano i coseni direttori della normale a $d\tau$ (presa in un verso determinato), la condizione (1) equivale (come abbiamo già accennato) alla [1]

(6) $$(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\tau = \text{costante}$$

lungo ogni tubo infinitamente sottile.

Per le (2), tenuto conto delle (3) e della (4), α, β, γ coincidono rispettivamente coi minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial u} & \dfrac{\partial(y+tY)}{\partial u} & \dfrac{\partial(z+tZ)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial v} & \dfrac{\partial(y+tY)}{\partial v} & \dfrac{\partial(z+tZ)}{\partial v} \end{matrix} \right\| ,$$

[1] Cfr. ad es. Appell, *Traité de mécanique rationnelle* (Paris, Gauthier-Villass, 1909), t. III, pp. 39-40.

moltiplicati per $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Per ciò e per la (5), possiamo dire che il primo membro della (6) coincide col prodotto per $du\,dv$ del determinante

$$D = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial(x+tX)}{\partial u} & \frac{\partial(y+tY)}{\partial u} & \frac{\partial(z+tZ)}{\partial u} \\ \frac{\partial(x+tX)}{\partial v} & \frac{\partial(y+tY)}{\partial v} & \frac{\partial(z+tZ)}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial x}{\partial u} + t\frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} + t\frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} + t\frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} + t\frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} + t\frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} + t\frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Pertanto la (6) equivale alla condizione seguente:

$$\frac{dD}{dt} = 0\,, \ \textit{per qualunque}\ t. \tag{7}$$

In particolare, essendo D funzione di secondo grado in t, si esige che sia nullo il coefficiente di t^2, cioe il determinante

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo il quadrato per righe del determinante a primo membro, e tenendo presenti le $\sum X^2 = 1$, $\sum X \frac{\partial X}{\partial u} = \sum X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$, la precedente diviene

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Scende da questa che sono nulli tutti i minori di second'ordine della matrice funzionale di X, Y, Z rispetto alle u, v. Ciò implica che la caratteristica di detta matrice dev'essere minore di due, e che quindi *le funzioni* X, Y, Z *dipendono da un solo parametro, poniamo ad es.* u.

Non ci occuperemo ulteriormente della condizione (7), essendo più conveniente riprendere a questo punto la questione per via diretta, sbarazzandoci dell'ausiliaria superficie σ.

2. Consideriamo adunque i coseni direttori X, Y, Z come funzioni dei punti (x, y, z) dello spazio, pel tramite — s' intende — del parametro u.

La congruenza

$$\frac{dx}{ds} = \mathrm{X} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \mathrm{Y} \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \mathrm{Z} \tag{8}$$

(in cui si designa con ds l'elemento d'arco) sarà rettilinea, purchè i coseni X, Y, Z conservino valore costante sopra le singole curve (8), sia cioè

$$\frac{d\mathrm{X}}{ds} = \frac{d\mathrm{Y}}{ds} = \frac{d\mathrm{Z}}{ds} = \mathrm{X}' \frac{du}{ds} = \mathrm{Y}' \frac{du}{ds} = \mathrm{Z}' \frac{du}{ds} = 0\,,$$

avendo indicato con un apice la derivazione rispetto ad u. Se si esclude che tutte le X′, Y′, Z′ sieno nulle (nel qual caso la congruenza sarebbe costituita da rette parallele) le precedenti dànno, tenendo presenti anche le (8), la relazione

$$\frac{du}{ds} = \sum \mathrm{X} \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{9}$$

La (1) diviene

$$\sum \mathrm{X}' \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{10}$$

Se alle relazioni (9) e (10) si aggiunge la $\sum \mathrm{X}^2 = 1$, che ci dà in particolare

$$\sum \mathrm{X}\mathrm{X}' = 0\,, \tag{11}$$

avremo considerate *tutte le condizioni che caratterizzano nello spazio una congruenza rettilinea solenoidale.*

Da esse risulta che *le superficie $u(x, y, z) =$ costante, non possono essere che piani, ciascuno dei quali contiene le due direzioni ortogonali* (X, Y, Z) *e* (X′, Y′, Z′).

Sia perciò

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0\,, \tag{12}$$

dove A, B, C, D sono funzioni arbitrarie del parametro u, l'equazione che definisce, nel modo più generale, il sistema di piani $u =$ costante.

Osservando che i coseni direttori delle normali a questi piani sono proporzionali tanto a $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, quanto ad A, B, C, le (9) e (10) divengono rispettivamente

$$\sum \mathrm{A}\mathrm{X} = 0\,, \tag{9'}$$

e

$$\sum \mathrm{A}\mathrm{X}' = 0\,;$$

la quale ultima, essendo per la (9') $\sum AX' = \sum A'X$, può venire sostituita dalla seguente:

$$\sum A'X = 0 . \tag{10'}$$

Ciò posto dalle (9') e (10') risulta che X , Y , Z sono proporzionali ai minori di second'ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

i quali alla loro volta (atteso l'accennato significato di A , B , C) sono proporzionali ai coseni direttori della tangente allo spigolo di regresso della rigata inviluppata dal sistema semplicemente infinito dei piani u = costante. Pertanto le direzioni X , Y , Z giacenti in detti piani sono parallele alle generatrici della rigata.

Reciprocamente è ben chiaro che, assegnata una curva nello spazio e preso a considerare il sistema de' suoi piani osculatori e su questi il sistema delle rette parallele alle rispettive tangenti alla curva, sono soddisfatte tutte le condizioni che caratterizzano una congruenza rettilinea solenoidale.

Chimica. — *Sulla natura dei cosidetti sali doppî fra caffeina e sali alcalini* [1]. Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Socio G. Ciamician.

La solubilità della caffeina nell'acqua alla temperatura ordinaria non è molto grande: aumenta considerevolmente quando la caffeina viene aggiunta a certe soluzioni saline, specialmente sali alcalini di acidi organici, benzoato di sodio, benzoato di litio, salicilato di sodio, e inoltre bromuro sodico e potassico, joduro potassico ecc. Vengono perciò messi in commercio dei prodotti ottenuti sciogliendo la caffeina nelle soluzioni acquose concentrate dei sali alcalini ed evaporando di poi a secco a mite calore. Sono usati in medicina, specialmente per uso ipodermico, in causa della grande solubilità nell'acqua.

Nella letteratura chimico-farmaceutica tali prodotti passano sotto il nome di sali doppî, benchè appaia dubbio che si possano ritenere tali nel vero significato chimico. I rapporti secondo i quali vengono fatti reagire la caffeina ed i sali alcalini, rispondono più ad un criterio di massima solubilità, di azione terapeutica, di aspetto fisico (benzoato di litio e caffeina) [2] che non ad un criterio di costituzione chimica.

Allo stato solido questi cosidetti sali doppî cedono facilmente e completamente la caffeina ad un solvente opportuno, il cloroformio; e così pure

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.
[2] Chem. Central-Blatt, 1908, II, 121.