ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Mi permetto in questa breve Nota di applicare (come esempio) i metodi dati nel mio precedente lavoro: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* [1] alla equazione integro-differenziale

$$
\tag{A}
\begin{aligned}
0 = &\frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,t)}{\partial z^2} + \\
&+ \int_t^\theta \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t) + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau,t) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau,t) \right\} d\tau
\end{aligned}
$$

a cui ho già consacrato una Memoria precedente.

2. Cominciamo dal considerare l'equazione differenziale

$$
\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}(1+z_1) + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}(1+z_2) + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2}(1+z_3) = 0 .
$$

Pongasi

$$
1+z_1 = \frac{1}{1-\zeta_1} \quad , \quad 1+z_2 = \frac{1}{1-\zeta_2} \quad , \quad 1+z_3 = \frac{1}{1-\zeta_3}
$$

[1] Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 20 febbraio 1910.

cioè, supposto $|\zeta_i| < 1$,

$$\zeta_i = z_i - z_i^2 + z_i^3 - z_i^4 + \cdots$$

La (A) possiederà l'integrale particolare

$$U = \frac{\zeta}{\sqrt{x^2(1-\zeta_1) + y^2(1-\zeta_2) + z^2(1-\zeta_3)}}$$

in cui ζ è un parametro qualsiasi indipendente da x, y, z.

Per valori di $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ con modulo sufficientemente piccolo avremo lo sviluppo convergente

$$U = \frac{\zeta}{r}\left\{1 + \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\dots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\zeta_1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2\zeta_2 + \left(\frac{z}{r}\right)\zeta_3\right]^n\right\}$$

ove

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3. Supponiamo ora che le funzioni $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ siano fra loro permutabili e che $\chi(t, \tau)$ sia pure permutabile colle funzioni stesse; allora le regole date nel lavoro citato precedentemente ci permettono di ottenere la soluzione fondamentale della (A) nel modo seguente.

Poniamo (denotando col simbolo di potenze le operazioni di composizione)

$$F(\tau, t) = f(\tau, t) - f^2(\tau, t) + f^3(\tau, t) - \cdots$$
$$\Phi(\tau, t) = \varphi(\tau, t) - \varphi^2(\tau, t) + \varphi^3(\tau, t) - \cdots$$
$$\Psi(\tau, t) = \psi(\tau, t) - \psi^2(\tau, t) + \psi^3(\tau, t) - \cdots$$

$$\Theta(x, y, z|\tau, t) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 F(\tau, t) + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \Phi(\tau, t) + \left(\frac{z}{r}\right)^2 \Psi(\tau, t).$$

La soluzione cercata della (A) sarà data da

$$u(x, y, z|\theta, t) =$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{r}\left\{\chi(\theta, t) + \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\dots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}\int_t^\theta \chi(\theta, \tau)\, \Theta^n(x, y, z|\tau, t)\, d\tau\right\}.$$

La convergenza delle serie considerate sussiste qualunque sia la grandezza dei valori assoluti delle funzioni f, φ, ψ, χ, purchè essi siano finiti.

Si vede facilmente che la espressione precedente soddisfarà la (A) anche se $\chi = 1$.

4. Nella Nota *Sulle equazioni integro-differenziali* (¹) abbiamo data la soluzione fondamentale della equazione (A) senza fare l'ipotesi della per-

(¹) Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 21 febbraio 1909.

mutabilità delle funzioni f, φ, ψ; essa si riduce facilmente alla (1) quando queste funzioni siano permutabili.

A questo proposito ricordiamo quanto fu osservato nel § 7 della Nota citata, cioè che i teoremi IV e V della Nota stessa e le loro conseguenze possono estendersi anche al caso di funzioni non permutabili e quindi la risoluzione generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali può estendersi anche al caso in cui si abbia da che fare con funzioni non permutabili. Così, per esempio, se avremo l'equazione integrale [1]

$$a_m f^m + z_m \int_x^y \Phi_m(x, \xi) f^m(\xi, y) \, d\xi + a_{m-1} f^{m-1} +$$
$$+ z_{m-1} \int_x^y \Phi_{m-1}(x, \xi) f^{m-1}(\xi, y) \, d\xi + \cdots$$
$$+ a_1 f + z_1 \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y) \, d\xi = z_0 \Phi_0(x, y),$$

in cui le potenze di f denotano operazioni di composizione, se sviluppiamo f in serie di potenze di $z_0, z_1, \dots z_m$, lo sviluppo sarà valido qualunque sia il modulo di questi parametri ed il valore assoluto delle costanti $a_1 \dots a_m$ e delle funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_m$ (anche se queste funzioni non saranno permutabili fra loro) purchè i valori stessi siano finiti e $a_1 \gtrless 0$. Quando Φ_0, $\Phi_1, \dots \Phi_m$ saranno permutabili, la soluzione assumerà la forma semplice che discende dallo sviluppo in serie della radice d'una equazione algebrica.

5. L'operazione di composizione è estendibile al caso di funzioni di $2n$ variabili. Così potrà considerarsi l'integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n \, \mathrm{F}_1(x_1, \dots x_n | \xi_1, \dots \xi_n) \, \mathrm{F}_2(\xi_1, \dots \xi_n | y_1, \dots y_n) \, d\xi_1 \dots d\xi_n .$$

Supponiamo che

$$\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \dots \alpha_h = x_h, \alpha_{h+1} = 0, \alpha_{h+2} = 0, \dots \alpha_n = 0$$
$$\beta_1 = y_1, \beta_2 = y_2, \dots \beta_h = y_h, \beta_{h+1} = 1, \beta_{h+2} = 1, \dots \beta_n = 1.$$

Se il detto integrale sarà eguale a

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n \, \mathrm{F}_2(x_1, \dots x_n | \xi_1, \dots \xi_n) \, \mathrm{F}_1(\xi_1 \dots \xi_n | y_1, \dots y_n) \, d\xi_1 \dots d\xi_n ,$$

F_1 e F_2 saranno permutabili.

Se $h \gtrless 1$ si potranno estendere a questo caso le proposizioni date per la composizione di prima specie.

Sotto questo punto di vista la teoria svolta per l'equazione integro-differenziale (A) può estendersi al caso in cui in essa figuri un integrale multiplo anzichè semplice.

[1] Cfr. Nota citata, § 4, pag. 173.