ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

La soluzione di 92 gr. di alcool benzilico in 185 gr. di acetone fu esposta al sole durante i mesi di estate ed autunno. Il liquido senza colore risultante, spogliato dalla parte volatile a b. m., venne distillato a pressione ridotta (13 mm.) ed indi anche a vapore, per liberarlo dall'alcool benzilico rimasto inalterato. Quello che passa è alcool benzilico puro, dal punto di ebollizione 204-206°.

Il residuo si rapprende in una massa cristallina, che venne seccata sull'acido solforico (31,5 gr.) ed indi estratta ripetutamente a caldo con etere petrolico. La parte maggiore resta indietro ed è formata dall'*idrobenzoino*, che purificato dall'alcool, si presentò in pagliette splendenti dal punto di fusione 137-138°. Gli autori dànno come punto di fusione di questo corpo 138° (1).

La parte asportata dall'etere petrolico si dimostrò costituita dall'*isoidrobenzoino*; purificata dall'alcool e poi dal benzolo dette tavole senza colore dal punto di fusione 121°, mentre nella letteratura si trova per questa sostanza il punto di fusione 119-120° (2).

Anche sull'azione della luce sul miscuglio di etere ed acetone abbiamo delle vecchie esperienze incomplete, che devono essere riprese. Si forma un composto dal punto di ebollizione 139-140°, di cui non abbiamo ancora accertato la composizione.

Per ultimo ci è grato ricordare l'aiuto efficace e diligente, che, nella parte recente di questi studî, ebbero a prestarci i dott.ri Ugo Pestalozza e Luigi Vecchiotti.

Meccanica. — *Sulla resistenza che provano le superficie piane mobili nell'aria.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

La determinazione della resistenza esercitata dall'aria contro le superficie in moto (in particolare contro le superficie piane rettangolari) è divenuto un problema di grandissima importanza per la costruzione e il perfezionamento delle macchine aeree. Le numerose esperienze di quest'ultimi vent'anni, da Dines e Langley fino a quelle recenti dell'ing. Eiffel, furono istituite principalmente allo scopo di determinare il coefficiente K nella celebre formula di Newton

$$R = K\varrho\sigma v^2 ; \tag{0}$$

ove ϱ è la densità, σ l'area della superficie (piana), v la velocità del moto rettilineo uniforme. Fra i risultati ottenuti regna un grande disaccordo; pur

(1) Beilstein, II, pag. 1100.
(2) Ibid., pag. 1102.

tenendosi al confronto dei valori medî. Che se poi si confrontano le singole esperienze, il disaccordo è tale che alcuni ritengono la formula di Newton in piena contraddizione con l'esperienza. Il valore di K si trova estremamente variabile; e non solo con l'angolo d'inclinazione e con la figura del piano, bensì con la velocità e con l'area.

Come si possono mettere d'accordo i risultati di tante esperienze, alcune condotte anche con notabile precisione? Quale formula si deve sostituire alla (0)? Ecco il problema che i rapidi progressi dell'aviazione impongono di risolvere con soddisfacente approssimazione.

Purtroppo la classica teoria dei fluidi è ancora impotente a portare un valido contributo al difficile problema, malgrado i bei lavori di Helmoltz, di Rayleygh e del prof. Levi-Civita. La teoria della scìa dà indicazioni insufficienti e non è in pieno accordo coi fatti. Dietro alla superficie in moto avvengono moti vorticosi (come ben risulta, per es., dalle belle esperienze di Albhorn), che la teoria non riesce a prevedere e ad analizzare, nemmeno con qualche approssimazione.

Mancando dunque per ora il sussidio della classica teoria, bisogna cercare se non sia possibile con un'analisi elementare, indipendente dalla teoria dei fluidi, portare qualche lume agli esperimentatori, affinchè possano trovare l'accordo desiderato dei loro risultati, rappresentandoli con una formula sufficientemente approssimata pei bisogni della pratica.

Questo è quanto ho tentato di fare. Lavoro modesto invero; pur nutro fiducia che gli esperimentatori, se vorranno saggiare le formule qui date, potranno riuscire a sintetizzare i loro risultati in modo soddisfacente.

1. Sia x una grandezza fisica dipendente da altre grandezze variabili $x_1, x_2, \dots x_r$ mediante una determinata relazione

$$x = f(x_1, x_2, \dots x_r) \tag{0}$$

a coefficienti numerici. Questi coefficienti possono essere di varia natura: alcuni numeri assoluti, indipendenti dalle unità di misura che si scelgono; altri di dimensioni non nulli e rappresentanti perciò grandezze fisiche, che sono considerate costanti; delle quali però talune possono essere costanti universali (per es., la velocità della luce), altre si potrebbero anche considerare variabili, generalizzando la (0) (per es., la velocità del suono, che muta col fluido). Se la forma f è data e solo i coefficienti si devono determinare con l'esperienza, è facile stabilire la natura di quei coefficienti e talora di darne l'interpretazione fisica in rapporto al fenomeno che si studia; ma se la f è ignota e si deve costruirla con l'esperienza, nulla si può dire a priori sulla natura dei coefficienti; ed anzi per diminuire le difficoltà della ricerca sperimentale della f e per tentare di avvicinarsi alla verità con approssimazioni successive occorre fare a priori delle ipotesi sulla natura di quei coefficienti. Orbene, quando si crede d'aver preso in considerazione tutte le variabili $x_1, x_2, \ldots x_r$ da cui la x può dipendere (cosa del resto che non si può sempre affermare in modo sicuro, specialmente nei fenomeni complicati e poco noti), la cosa più naturale in un primo tentativo è di supporre che tutti i coefficienti della f sieno numeri assoluti.

Ciò posto, veniamo alla nostra questione. Consideriamo un piano rettangolare infinitamente sottile di lati a e b, col lato a perpendicolare alla direzione del moto (moto rettilineo uniforme di velocità v), e il lato b inclinato sulla stessa direzione dell'angolo θ. Per ragioni di simmetria si ammette giustamente che le pressioni del fluido sugli elementi della faccia anteriore e della posteriore del rettangolo si riducano a una risultante unica giacente in un piano parallelo alla direzione del moto e passante per la linea mediana del rettangolo (cioè il segmento parallelo al lato b passante pel centro di figura). Tale risultante è la così detta *resistenza* R.

Da quali variabili dipende questa R? Evidentemente da a, b, θ, v, dalla pressione p e dalla densità ϱ dell'aria in cui si esperimenta (¹); onde potremo scrivere

$$\mathrm{R} = f(a, b, \theta, v, p, \varrho).$$

Poichè non si vedono altre variabili da cui possa dipendere f nel presente problema, ammetteremo che i coefficienti che entrano nella formazione di f sieno numeri assoluti. La natura e la giustificazione di questa ipotesi sono date appunto dalle considerazioni fatte di sopra; e la sua importanza risulterà ora, mostrando che essa permette subito d'assegnare a quella ignota funzione di 6 variabili una forma più semplice e perciò più accessibile all'esame sperimentale.

Introduciamo anzitutto le nuove variabili

$$l = \frac{a}{b} \quad , \quad \sigma = ab\,;$$

talchè la R diventa

$$\mathrm{R} = \Phi(l, \theta, \sigma, v, p, \varrho).$$

La σ è l'area del rettangolo; la l, rapporto di a a b, sarà detta *allungamento*. Le variabili l e θ hanno dimensioni nulle, e sono le sole.

Poichè R, ϱ, p hanno dimensione uno rispetto alla massa, e sono le sole grandezze dipendenti dalla massa, se si cambia l'unità di misura in guisa che m diventi λm, le R, p, ϱ diventano $\lambda\mathrm{R}, \lambda p, \lambda\varrho$ e si avrà

$$\lambda\mathrm{R} = \lambda\Phi = \Phi(l, \theta, \sigma, v, \lambda p, \lambda\varrho).$$

(¹) La relazione fra p, ϱ e la temperatura dispensa dal considerare R funzione anche della temperatura.

Ciò richiede che Φ sia una funzione lineare omogenea in p e ϱ; potremo dunque scrivere

$$\mathrm{R} = \Phi_1\left(l\,,\theta\,,\sigma\,,v\,,\frac{p}{\varrho}\right)\cdot\varrho\,.$$

Indicando con u la velocità del suono si ha per cose note

$$u = \sqrt{\sigma_0\,\frac{p}{\varrho}}\,,$$

ove σ_0 è una costante della natura di un'area. Di qui si trae

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{u^2}{\sigma_0}\,;$$

e per conseguenza

$$\mathrm{R} = \Phi_1\left(l\,,\theta\,,\sigma\,,v\,\frac{u^2}{\sigma_0}\right)\cdot\varrho\,.$$

Ora qui $\mathrm{R}\,,v$ e u sono le sole grandezze dipendenti dall'unità di tempo; talchè se si cambia l'unità in guisa che t diventi $\frac{t}{\lambda}$ risulterà

$$\lambda^2\mathrm{R} = \Phi_1\left(l\,,\theta\,,\sigma\,,\lambda v\,,\lambda^2\frac{u^2}{\sigma_0}\right)\varrho\,,$$

ossia

$$\lambda^2\Phi_1 = \Phi_1\left(l\,,\theta\,,\sigma\,,\lambda v\,,\lambda^2\,\frac{u^2}{\sigma_0}\right).$$

Ciò richiede che Φ_1 sia funzione quadratica omogenea in u e v; onde si avrà

$$\mathrm{R} = \varphi\left(l\,,\theta\,,\sigma\,,\frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right)\cdot\varrho v^2.$$

Non basta. Le quantità $l\,,\theta\,,\frac{u}{v}$, sono indipendenti dalle unità di misura; ma σ e σ_0 dipendono dall'unità lineare e hanno dimensione due, mentre R ha dimensione uno; si ha perciò, collo stesso ragionamento

$$\lambda^2\varphi = \varphi\left(l\,,\theta\,,\lambda^2\sigma\,,\frac{1}{\lambda^2\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right)\,;$$

la quale dimostra che φ è omogenea di grado uno in σ e σ_0; talchè risulterà

$$\mathrm{R} = \psi\left(l\,,\theta\,,\frac{\sigma}{\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right)\cdot\varrho\sigma v^2.$$

Le grandezze l, θ e $w = \frac{\sigma}{\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2$ avendo dimensioni nulle, resta come risultato definitivo del nostro ragionamento la formula

$$R = K(l, \theta, w)\,\varrho\sigma v^2. \tag{1}$$

Tanto per intenderci, chiameremo la w (o la $\sqrt{w}$) il *rapporto specifico*. È il rapporto di due tempi: il tempo $\frac{\sqrt{\sigma}}{v}$ impiegato dal rettangolo a percorrere la lunghezza $\sqrt{\sigma}$, diviso pel tempo $\frac{\sqrt{\sigma_0}}{u}$ impiegato dal suono a percorrere la lunghezza $\sqrt{\sigma_0}$.

Confrontando questa formula con quella di Newton, si vede che il K, in luogo d'esser costante, è funzione dell'allungamento, dell'inclinazione e del rapporto specifico. Sono così messe in evidenza le variabili da cui dipende quel K, che l'esperienza dimostra non potersi considerare costante, neppure per $\theta = 90°$. Gli esperimentatori hanno anzi notato di più; e cioè, che il K varia con θ, colla forma del rettangolo (molti dicono col perimetro) e con qualche altra cosa che nessuno ha saputo definire. La (1) concorda con queste osservazioni e dà il significato preciso delle variabili da cui dipende K.

È anche da notare che la (1) è in accordo con le ben note esperienze dell'ing. Canovetti; il solo esperimentatore che, notata la variabilità di K con v, abbia abbandonata la formula di Newton. Infatti, egli ha rappresentato assai bene le sue esperienze con una R della forma (nel caso di $l = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\alpha v^2 + \beta v\,;$$

la quale è del tipo della (1), perchè basta prendere (nel caso detto)

$$K = \lambda + \mu\sqrt{w}\,.$$

Infine facciamo osservare che la comparsa della velocità del suono in K (in una certa maniera) non ha del meraviglioso, perchè è ben noto che il fenomeno è diverso secondo che il mobile possiede velocità inferiore o superiore a quella del suono.

2. Nel caso di $\theta = 90°$ (piano normale alla direzione del moto) possiamo scrivere

$$R = K(l, w)\,\varrho\sigma v^2.$$

Qui è da osservare che la resistenza non muta mutando la posizione del rettangolo nel suo piano, perchè il moto dell'aria è sempre lo stesso rispetto al rettangolo; e poichè scambiando b con a si ottiene un rettangolo che differisce dal primo per la posizione, si deve avere necessariamente

$$\mathrm{K}(l, w) = \mathrm{K}\left(\frac{1}{l}, w\right).$$

Posto

$$l + \frac{1}{l} = m$$

si trae

$$\mathrm{K}(m + \sqrt{m^2 - 1}, w) = \mathrm{K}(m - \sqrt{m^2 - 1}, w),$$

la qual condizione richiede che K sia funzione di m e non di $\sqrt{m^2 - 1}$. Dunque, nel caso del piano normale si ha più precisamente

$$\mathrm{R} = \mathrm{K}(m, w)\, \varrho\sigma v^2. \tag{2}$$

Chiameremo *modulo di figura* il numero

$$m = 1 + \frac{1}{l} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{\sigma};$$

rapporto dell'area del quadrato costruito sulla diagonale all'area del rettangolo.

Di qui risulta ancora che nella formula generale (1) la l deve entrare in K, in guisa che per $\theta = 90°$ si riduca a una funzione del modulo. Infine è da notare che deve essere

$$\mathrm{K}(l, \theta, w) = \mathrm{K}(l, \pi - \theta, w).$$

L'ing. Soreau, nelle sue belle ricerche sui problemi dell'aviazione [1], è il solo che abbia intuita la dipendenza di K dall'allungamento (egli però chiama allungamento il numero $h = \dfrac{l-1}{l+1}$), e ha proposta la formula (indipendente da w)

$$\mathrm{K} = \lambda \operatorname{sen}\theta \left\{ 1 + \frac{1 - h \operatorname{tang}\theta}{\dfrac{1}{(1+h)^2} + \dfrac{2h}{1+h}\operatorname{tang}\theta + 2\operatorname{tang}^2\theta} \right\},$$

che traduce assai bene l'esperienze di Langley.

Ma questa formula non è soddisfacente; perchè, a parte la indipendenza da w, non soddisfa alle condizioni

$$\mathrm{K}\left(l, \frac{\pi}{2}, w\right) = \mathrm{K}(m, w) \quad , \quad \mathrm{K}(l, \theta, w) = \mathrm{K}(l, \pi - \theta, w);$$

onde non potrà rappresentare altrettanto bene tutte le altre esperienze.

[1] *État actuel et avenir de l'aviation* (Société des Ingegnieurs civils, Bull. 1908).

3. Importante per la pratica è anche la determinazione del punto di applicazione (centro di pressione) e della direzione di R; e notabili sono in proposito l'esperienze recenti degli ing. Rateau e Eiffel. Ma anche qui non sono state trovate formule soddisfacenti.

Indichiamo con x la distanza del centro di pressione dal centro di figura, contata positivamente verso il lato anteriore; con α l'angolo che la direzione di R fa con la normale condotta sulla faccia posteriore del rettangolo. Le x e α dipenderanno dalle stesse variabili $a, b, \theta, v, p, \varrho$ da cui dipende la grandezza di R; ed è naturale e coerente fare su queste funzioni la stessa ipotesi fatta in principio sulla f. Allora con ragionamenti analoghi a quelli fatti precedentemente si trova

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= K_1(l, \theta, w)\sqrt{\sigma} \\ \operatorname{sen} \alpha &= K_2(l, \theta, w)\,. \end{aligned}$$

Come si vede, per l, θ e w costanti, α è costante e la x varia proporzionalmente alla radice quadrata dell'area.

Le tre funzioni K, K_1, K_2 definiscono la resistenza in grandezza, direzione e punto d'applicazione; ed è la ricerca di esse che costituisce il problema sperimentale; il quale resta così ben precisato; e non è piccola cosa.

Concludo queste brevi osservazioni invitando gli esperimentatori a provare di mettere d'accordo i loro risultati con formule del tipo (1), (2) e (3).

Meccanica. — *Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un liquido soggetto ad assegnate forze di massa e dotato di un moto qualsiasi. È noto che imprimendo a tutta la massa liquida una traslazione uniforme d'insieme le condizioni dinamiche rimangono invariate.

In particolare resta inalterata la distribuzione locale delle pressioni.

Sorge a questo punto spontanea la domanda: esistono altri moti stazionari i quali non influiscono affatto sopra la distribuzione locale delle pressioni?

La risposta — che forma oggetto della presente Nota — è affermativa.

Si trova in modo facile ed esauriente che nei moti in questione:

a) le traiettorie delle molecole liquide sono rette appartenenti ad una congruenza rettilinea solenoidale [1], o, in particolare, sono rette parallele;

b) ciascuna retta scorre su se stessa con velocità costante; il valore

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, questi Rendiconti, seduta del 20 marzo 1910.