ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

3. Importante per la pratica è anche la determinazione del punto di applicazione (centro di pressione) e della direzione di R; e notabili sono in proposito l'esperienze recenti degli ing. Rateau e Eiffel. Ma anche qui non sono state trovate formule soddisfacenti.

Indichiamo con x la distanza del centro di pressione dal centro di figura, contata positivamente verso il lato anteriore; con α l'angolo che la direzione di R fa con la normale condotta sulla faccia posteriore del rettangolo. Le x e α dipenderanno dalle stesse variabili $a, b, \theta, v, p, \varrho$ da cui dipende la grandezza di R; ed è naturale e coerente fare su queste funzioni la stessa ipotesi fatta in principio sulla f. Allora con ragionamenti analoghi a quelli fatti precedentemente si trova

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{K}_1(l, \theta, w)\sqrt{\sigma} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \mathrm{K}_2(l, \theta, w). \end{aligned}$$

Come si vede, per l, θ e w costanti, α è costante e la x varia proporzionalmente alla radice quadrata dell'area.

Le tre funzioni $\mathrm{K}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ definiscono la resistenza in grandezza, direzione e punto d'applicazione; ed è la ricerca di esse che costituisce il problema sperimentale; il quale resta così ben precisato; e non è piccola cosa.

Concludo queste brevi osservazioni invitando gli esperimentatori a provare di mettere d'accordo i loro risultati con formule del tipo (1), (2) e (3).

Meccanica. — *Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un liquido soggetto ad assegnate forze di massa e dotato di un moto qualsiasi. È noto che imprimendo a tutta la massa liquida una traslazione uniforme d'insieme le condizioni dinamiche rimangono invariate.

In particolare resta inalterata la distribuzione locale delle pressioni.

Sorge a questo punto spontanea la domanda: esistono altri moti stazionari i quali non influiscono affatto sopra la distribuzione locale delle pressioni?

La risposta — che forma oggetto della presente Nota — è affermativa.

Si trova in modo facile ed esauriente che nei moti in questione:

a) le traiettorie delle molecole liquide sono rette appartenenti ad una congruenza rettilinea solenoidale [1], o, in particolare, sono rette parallele;

b) ciascuna retta scorre su se stessa con velocità costante; il valore

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, questi Rendiconti, seduta del 20 marzo 1910.

assoluto di tale velocità potendo variare da retta a retta in modo del tutto arbitrario.

Un caso particolare assai semplice ed espressivo, ci è offerto dalla corrente di un canale i cui filetti sono rette parallele fra loro ed al fondo (nonchè alle pareti ed alla superficie libera del canale) e che scorrono su se stessi, ciascuno essendo dotato di una velocità propria, e indipendente da quella degli altri filetti.

È chiaro che correnti di tale fatta si possono riguardare come vere e proprie *correnti spontanee* [1].

Non è privo di interesse notare che se ci si pone lo stesso problema per i fluidi comprimibili si perviene al seguente risultato. Le linee di corrente costituiscono una congruenza rettilinea. la cui *anormalità* è legata in modo semplice alla densità del fluido; la velocità si mantiene, ancor qui, costante sopra ciascuna retta, variando soltanto — in modo arbitrario — dall'una all'altra.

Ne viene che assegnata a priori la congruenza rettilinea delle linee di corrente, le forze di massa non si possono più assegnare preventivamente, come avviene per i liquidi.

1. Sia $\mathbf{F}$ la forza di massa unitaria del liquido, ϱ la densità (costante), p la pressione e $\mathbf{v}$ la velocità dei punti della massa liquida.

Le equazioni indefinite del moto sono, con notazioni vettoriali ben note:

$$(1) \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p ,$$

e l'equazione di continuità che nel nostro caso ($\varrho =$ costante) diviene

$$(2) \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 .$$

Affinchè lo stato di moto del liquido non influisca sulla distribuzione delle pressioni *è necessario e sufficiente*, come scende dalla (1), *che oltre la* (2) *si abbia*

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 .$$

Da questa intanto risulta che sopra ciascuna linea di corrente è $\mathbf{v} =$ costante, cioè: le linee di corrente costituiscono una congruenza rettilinea e di più su ciascuna retta della congruenza la velocità è costante in valore assoluto. Avremo pertanto

$$(3) \qquad \frac{dv}{ds} = 0 ,$$

sopra ogni retta della congruenza, designando con ds l'arco elementare.

[1] Vedi Cisotti, *Sopra le correnti liquide spontanee*, questi Rendiconti, vol. XIX (1910), pp. 10-14 e 81-83.

Detto $\mathbf{R}$ un vettore unitario diretto come la generica retta della congruenza (le componenti di $\mathbf{R}$, rispetto ad un prefissato sistema di riferimento, non sono altro che i coseni direttori della retta stessa), potremo scrivere

$$\mathbf{R}^2 = 1 \quad , \quad \frac{d\mathbf{R}}{ds} = 0 \quad , \quad \mathbf{v} = v\mathbf{R} \,. \tag{4}$$

Per queste la (2) diviene

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(v\mathbf{R}) = \frac{dv}{ds} + v \operatorname{div} \mathbf{R} = 0 \,,$$

e per la (3) — se si esclude il caso privo di interesse in cui $v = 0$ dappertutto —

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = 0 \,.$$

Da quest'ultima scende che *la congruenza rettilinea delle linee di corrente dev'essere solenoidale* [1], *oppure formata da rette parallele* ($\mathbf{R}$ costante).

Da quanto precede si può raccogliere che il moto del liquido dev'essere tale che le linee di corrente costituiscano una congruenza rettilinea solenoidale (oppure sono rette parallele), e di più lungo ciascuna retta della congruenza il valore assoluto della velocità sia costante, pur potendo variare dall'una all'altra in modo arbitrario.

È manifesto che tali condizioni sono anche sufficienti ad assicurarci che un moto in tal guisa definito, non influisce minimamente sopra la distribuzione locale delle pressioni.

2. Osservazione. — Se il fluido è comprimibile la densità ϱ non è più costante, ed allora la (2) va sostituita — beninteso qualora si considerino i soli moti permanenti — colla seguente

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \,. \tag{2'}$$

La (1) continua a sussistere e quindi possiamo ancora qui dire che le linee di corrente costituiscono una congruenza rettilinea, sopra ogni retta della quale continua a valere la (3).

La (2′), per le (4), diviene

$$\frac{d(\varrho v)}{ds} + \varrho v \operatorname{div} \mathbf{R} = 0,$$

ovvero per essere, tenuto conto della (3),

$$\frac{d(\varrho v)}{ds} = v \frac{d\varrho}{ds} \,,$$

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, loc. cit.

avremo (escludendo il caso statico, $v=0$)

$$(2'') \qquad \frac{d\varrho}{ds}+\varrho\,\mathrm{div}\,\mathbf{R}=\mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{R})=0\,.$$

Cerchiamo di soddisfare alle (4) e (2″) nel modo più generale.

Una distribuzione vettoriale **R** soddisfacente alle due prime delle (4) definisce una congruenza rettilinea. È facile desumere da esse che rot **R** è proporzionale ad **R**.

Chiamando A il coefficiente di proporzionalità, avremo

$$(5) \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{R}=\mathrm{A}\mathbf{R}\ [1].$$

La quantità scalare A è l'*anormalità* della congruenza considerata **R**.

Dalla precedente relazione si ricava

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{A}\mathbf{R})=0\,,$$

che confrontata colla (2″) ci permette di scrivere

$$\varrho=\alpha\mathrm{A}\,,$$

designando α una funzione costante sopra ciascuna retta della congruenza e del resto arbitraria.

Avendosi dalla (5), per la prima delle ($\bar{4}$),

$$\mathrm{A}=\mathbf{R}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{R}\,,$$

sarà

$$\varrho=\alpha\mathbf{R}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{R}\,.$$

Questa definisce ϱ in funzione di una prefissata congruenza rettilinea.

Dovendosi avere per la (1)

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p\,,$$

qualora sia assegnata la equazione fondamentale del fluido, la **F** risulta pure definita.

Matematica. — *Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio E. D'OVIDIO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Cfr. Levi-Civita, *Complementi al teorema di Malus-Dupin*, questi Rendiconti, vol. IX, 1° sem. 1900, pag. 186.