ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1910.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità.* Nota del Socio Carlo Somigliana.

In alcuni lavori recentemente pubblicati [1] io ho studiato da un punto di vista puramente meccanico il problema dell'equivalenza fra azioni a distanza ed azioni propagantisi da punto a punto attraverso ad un mezzo elastico, e sono riuscito a dimostrare la possibilità di una tale equivalenza con una notevole generalità e senza alcuna ipotesi speciale sulla natura del mezzo. Ho inoltre notato che mediante l'ordinaria teoria dell'elasticità non è possibile un'applicazione dello stesso procedimento a campi di forze magnetiche, in quanto quella teoria è basata sull'ipotesi che nessuna reazione elastica si manifesti quando le molecole del corpo deformato sono sollecitate a ruotare, senza modificazioni di forma, mentre questo è appunto il modo di agire delle forze magnetiche, almeno secondo i concetti attualmente accettati.

Si presentava quindi come necessaria una estensione della teoria classica dell'elasticità.

[1] *Sulla teoria Maxwelliana delle azioni a distanza*, Rend. Acc. dei Lincei, 1907; *Sul problema statico di Maxwell*, Memorie id. id., 1909; *Sopra una rappresentazione meccanica di alcuni campi di forza*, Nuovo Cimento, ser. V, vol. XVII, 1909.

Ora l'opportunità di una tale estensione fu già indicata da parecchi elasticisti e fu anche studiata sotto punti di vista assai diversi ed a proposito di questioni anche non direttamente concernenti le proprietà elastiche dei corpi [1]. Tuttavia i risultati ottenuti non sono sempre concordanti nè dànno luogo ad una teoria definitiva; per cui mi è sembrato conveniente riprendere la questione per stabilire le equazioni differenziali nel modo più semplice e ricercare la forma speciale che esse assumono nel caso dell'isotropia.

Una tale ricerca può anche giustificarsi in quanto può essere applicata allo studio di alcune deformazioni che forse non sono state prese finora in diretta considerazione. Immaginiamo infatti un corpo magnetico immerso in un campo magnetico. Se esso è libero di muoversi intorno al suo centro di gravità assumerà una certa orientazione dipendente dal campo. Ma se noi con mezzi meccanici impediamo un tale movimento esso dovrà, in generale, deformarsi, anche astrazion fatta dal ben noto fenomeno della magnetostrizione. Una tale deformazione non può attribuirsi a forze agenti sugli elementi di massa, nè a forze superficiali, ma a momenti di rotazione agenti sugli elementi stessi, mentre la teoria elastica ordinaria presuppone che tali momenti non abbiano alcuna azione deformante.

Ci troviamo quindi di fronte ad una questione che non sembra possa trovare spiegazione cogli antichi concetti, e possiamo quindi sperare che la teoria di cui ci occupiamo sia suscettibile di una conferma sperimentale, e forse possa portare qualche contributo utile intorno al modo di agire delle forze magnetiche.

I. L'ipotesi che porremo a base delle nostre considerazioni è la più semplice che si possa fare per rappresentare il fatto che esistono reazioni elastiche alle rotazioni molecolari. Supporremo che l'energia elastica elementare unitaria W, dipenda, oltre che dalle sei componenti di deformazione, anche dalle tre componenti della rotazione elementare. Introduciamo le notazioni solite: u, v, w per le componenti dello spostamento,

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad x_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

[1] Senza discutere qui le varie teorie, citerò i lavori principali riferentisi a questo argomento: Voigt, *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*, Abhand. K. Ges., Göttingen, 1887; Larmor. *The equations of Propagation of Disturbances in Girostatically Loaded Media and of the Circular Polarizzazion of Light*, Proc. London Math. Soc., 1891; Padova, *Interpretazione meccanica delle formole di Hertz*, Rend. Acc. dei Lincei, 1891; Lord Kelvin, *Baltimore Lectures*, London, 1904 (Lecture XX); Combiebac, *Sur les équations générales de l'élasticité*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXX, 1902; E. J. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Paris, 1909.

per le componenti di deformazione, e indichiamo con r_x, r_y, r_z le componenti della rotazione elementare, moltiplicata per 2:

$$r_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad r_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad r_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'energia elastica W dipenderà, per quello che si è detto, da queste nove variabili ed una variazione qualsiasi di essa sarà data da una espressione della forma seguente:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \delta W = {} & W_1 \delta x_x + W_2 \delta y_y + W_3 \delta z_z + W_4 \delta y_z + W_5 \delta z_x + W_6 \delta x_y + \\ & + W_7 \delta r_x + W_8 \delta r_y + W_9 \delta r_z .\end{aligned}$$

Indichiamo con X, Y, Z le componenti unitarie delle forze di massa, con L, M, N le componenti unitarie delle forze superficiali, e con $2M_x$, $2M_y$, $2M_z$ le componenti unitarie dei momenti, che, secondo il concetto già indicato, possono eventualmente agire sugli elementi di volume. Indicando con ϱ la densità, con S il volume occupato dal corpo, con s la superficie, il principio dei lavori virtuali ci porta allora, per l'equilibrio, alla relazione seguente:

$$\begin{aligned}(2)\qquad & \int_S \varrho(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS + \int_s (L\delta u + M\delta v + N\delta w)\, ds + \\ & + \int_S (M_x \delta r_x + M_y \delta r_y + M_z \delta r_z)\, dS - \int \delta W dS = 0.\end{aligned}$$

Se in questa equazione sostituiamo il valore (1) di δW e trasformiamo coi soliti metodi gli integrali in modo da rendere lineari rispetto a δu, δv, δw le funzioni che compaiono sotto i segni d'integrazione, otteniamo subito che nello spazio S devono essere soddisfatte le seguenti equazioni, che vengono a sostituire le ordinarie equazioni indefinite dell'equilibrio elastico:

$$(3)\qquad \begin{aligned} & \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial(W_6 - W_9)}{\partial y} + \frac{\partial(W_5 + W_8)}{\partial z} + \varrho X + \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0 \\ & \frac{\partial(W_6 + W_9)}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial(W_4 - W_7)}{\partial z} + \varrho Y + \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial(W_5 - W_8)}{\partial x} + \frac{\partial(W_4 + W_7)}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \varrho Z + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0 .\end{aligned}$$

Per stabilire le equazioni che debbono essere soddisfatte alla superficie, conviene dapprima osservare che fra gli integrali di superficie provenienti dal primo membro della (2) vi è il seguente:

$$\begin{aligned}(4)\qquad & \int_s \Big[\Big(M_y \frac{\partial z}{\partial n} - M_z \frac{\partial y}{\partial n} \Big) \delta u + \Big(M_z \frac{\partial x}{\partial n} - M_x \frac{\partial z}{\partial n} \Big) \delta v + \\ & \qquad + \Big(M_x \frac{\partial y}{\partial n} - M_y \frac{\partial x}{\partial n} \Big) \delta w \Big] ds .\end{aligned}$$

Ora noi abbiamo considerato i momenti M_x, M_y, M_z come agenti sugli elementi di volume dS, nè sappiamo quale significato si possa attribuire ai prodotti $M_x ds, M_y ds, M_z ds$. D'altra parte, come osserva il Voigt (Mem. cit., pag. 11) noi non conosciamo alcun mezzo sperimentale per produrre dei momenti di rotazione agenti sopra elementi superficiali, e conviene quindi per ora *considerare quei prodotti come nulli*.

Le equazioni alla superficie che si ottengono con questa ipotesi sono allora:

$$
\begin{aligned}
&W_1 \frac{\partial x}{\partial n} + (W_6 - W_9)\frac{\partial y}{\partial n} + (W_5 + W_8)\frac{\partial z}{\partial n} + L = 0 \\
(3')\qquad &(W_6 + W_9)\frac{\partial x}{\partial n} + W_2 \frac{\partial y}{\partial n} + (W_4 - W_7)\frac{\partial z}{\partial n} + M = 0 \\
&(W_5 - W_8)\frac{\partial x}{\partial n} + (W_4 + W_7)\frac{\partial y}{\partial n} + W_3 \frac{\partial z}{\partial n} + N = 0 .
\end{aligned}
$$

Il sig. Combiebac (nel lavoro citato) conserva nelle equazioni al contorno i termini provenienti dall'integrale (4); il che, secondo un punto di vista puramente analitico, è sempre lecito. Però conviene osservare che in questo caso, oltre la difficoltà già accennata, non è possibile dedurre senza altro dalle (3') le relazioni che dànno le espressioni delle componenti di tensione, relative ad un elemento superficiale qualsiasi. Infatti in queste equazioni noi possiamo identificare le L, M, N alle componenti di tali tensioni relative ad un elemento superficiale interno al corpo, come si fa ordinariamente, ma non sapremmo a quale grandezza meccanica identificare le M_x, M_y, M_z relative ad un tale elemento.

Nel caso nostro invece, ammettendo, come di solito, che un elemento superficiale interno sia in equilibrio sotto l'azione di due tensioni elastiche uguali ed opposte, ed indicando con X_n, Y_n, Z_n le componenti della tensione relativa all'elemento di normale n, dalle (3') applicate ad elementi superficiali le cui normali siano parallele agli assi coordinati, troviamo subito

$$
\begin{array}{lll}
X_x = W_1 & Y_x = W_6 + W_9 & Z_x = W_5 - W_8 \\
X_y = W_6 - W_9 & Y_y = W_2 & Z_y = W_4 + W_7 \\
X_z = W_5 + W_8 & Y_z = W_4 - W_7 & Z_z = W_3
\end{array}
$$

e quindi ricordando che, pel teorema di lord Kelvin, δW deve essere un differenziale esatto, si hanno, fra le componenti di tensione e le derivate dell'energia le relazioni

$$
\begin{array}{llll}
& X_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_x} & Y_y = \dfrac{\partial W}{\partial y_y} & Z_z = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} \\[2ex]
(5)\qquad & Y_z = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} - \dfrac{\partial W}{\partial r_x} & Z_x = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} - \dfrac{\partial W}{\partial r_y} & X_y = \dfrac{\partial W}{\partial x_y} - \dfrac{\partial W}{\partial r_z} \\[2ex]
& Z_y = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} + \dfrac{\partial W}{\partial r_x} & X_z = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} + \dfrac{\partial W}{\partial r_y} & Y_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_y} + \dfrac{\partial W}{\partial r_z} .
\end{array}
$$

Le differenze $Y_z - Z_y$, $Z_x - X_z$, $X_y - Y_x$ non sono quindi nulle, come nella teoria ordinaria, ma si ha

$$\tfrac{1}{2}(Z_y - Y_z) = \frac{\partial W}{\partial r_x}\,, \quad \tfrac{1}{2}(X_z - Z_x) = \frac{\partial W}{\partial r_y}\,, \quad \tfrac{1}{2}(Y_x - X_y) = \frac{\partial W}{\partial r_z}$$

e inoltre

$$\tfrac{1}{2}(Z_y + Y_z) = \frac{\partial W}{\partial y_z} \quad \tfrac{1}{2}(X_z + Z_x) = \frac{\partial W}{\partial z_x} \quad \tfrac{1}{2}(Y_x + X_y) = \frac{\partial W}{\partial x_y}\,.$$

È questa, a nostro avviso, la forma più semplice che può assumere la teoria delle tensioni elastiche e dell'equilibrio quando si ammetta che la energia venga a dipendere anche dalle componenti di rotazione.

II. Si presenta ora la questione di determinare le varie espressioni che spettano alla funzione W (per la quale si assume, per ben note ragioni, una forma quadratica) quando il materiale elastico ammette degli elementi di simmetria.

Non tratterò la quistione in generale, sebbene essa non presenti alcuna difficoltà teorica; mi limiterò, per brevità, a considerare il caso che esista un asse di isotropia, per dedurne poi l'espressione di W, che è la più interessante, quella corrispondente al caso dell'isotropia completa.

Le formole di trasformazione per le sei componenti di deformazione, quando gli assi coordinati ruotano di un angolo α intorno all'asse delle z, si possono scrivere nella forma seguente, da me usata in varie occasioni (1)

$$(a) \qquad x'_x - y'_y + i x'_y = e^{2i\alpha}(x_x - y_y + i x_y)$$

$$(b) \qquad x'_x + y'_y = x_x + y_y$$

$$(c) \qquad z'_x + i z'_y = e^{i\alpha}(z_x + i z_y) \qquad\qquad i = \sqrt{-1}$$

$$(d) \qquad z'_z = z_z$$

mentre per quelle relative alle rotazioni si ha

$$(e) \qquad r'_x + i r'_y = e^{i\alpha}(r_x + i r_y)$$

$$(f) \qquad r'_z = r_z\,.$$

Si decompongono così in tre sostituzioni ortogonali di tre variabili sotto forma canonica. La W dovrà, nel caso della isotropia assiale, essere formata linearmente colle espressioni quadratiche invariantive per una rotazione arbitraria attorno all'asse delle z, posto di scegliere questo asse come asse di isotropia. Tali espressioni si ottengono eliminando α fra le relazioni precedenti e le loro coniugate. Si trovano così, come è ben noto, cinque inva-

(1) *Sul potenziale elastico*, Annali di Matematica, 1901.

rianti quadratici (di rotazione) formati colle sei componenti di deformazione, cioè

$$I_1 = (x_x + y_y)^2 \qquad I_2 = z_z^2 \qquad I_3 = (x_x + y_y)\, z_z$$
$$I_4 = z_x^2 + z_y^2 \qquad I_5 = (x_x - y_y)^2 + x_y^2 .$$

Restano ora da trovarsi gli invarianti che dipendono anche da r_x, r_y, r_z.

Dalle (b) (d) (e) (f) risultano subito gli invarianti quadratici

$$R_1 = r_x^2 + r_y^2 \qquad R_2 = r_z^2 \qquad R_3 = r_z z_z \qquad R_4 = (x_x + y_y)\, r_z .$$

Per moltiplicazione dalle (c) e dalla coniugata della (e) si ha inoltre

$$(z'_x + iz'_y)(r'_x - ir'_y) = (z_x + iz_y)(r_x - ir_y)$$

da cui risultano gli altri due invarianti

$$R_5 = z_x r_x + z_y r_y \qquad R_6 = z_y r_x - z_x r_y .$$

Non è difficile vedere che dalle combinazioni delle relazioni precedenti non è possibile dedurre altre formazioni invariantive e possiamo quindi concludere:

La energia elastica W, *nell'ipotesi che essa dipenda dalle sei componenti di deformazione e dalle tre componenti di rotazione, quando esiste un asse d'isotropia, è funzione lineare dei cinque invarianti* I, *e dei sei invarianti* R, *ora determinati. Conterrà quindi undici coefficienti.*

È assai facile ora dedurre da questa espressione quella dell'isotropia completa, dovendo tale espressione essere un caso speciale della prima.

È noto che quando W non contiene r_x, r_y, r_z si riduce, nel caso dell'isotropia, ad una funzione lineare dei due invarianti

$$(x_x + y_y + z_z)^2 \quad , \quad x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2).$$

Basterà quindi considerare la parte di W che è formata cogli invarianti R. Scrivendola sotto la forma

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + c_3 R_3 + c_4 R_4 + c_5 R_5 + c_6 R_6$$

essa dovrà rimanere inalterata scambiando fra loro comunque gli assi. Scambiando gli assi delle z e delle x, si vede facilmente che dovrà essere

$$c_1 = c_2 \qquad c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

e che perciò deve ridursi alla forma

$$c_1(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)$$

la quale è evidentemente isotropa.

Concludiamo quindi:

La forma generale dell'energia W, *quando dipende dalle componenti di deformazione e di rotazione, nel caso dell'isotropia è formata linearmente con tre invarianti e può porsi sotto la forma:*

$$2W = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2) + \\ + \nu(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2).$$

In questa espressione alle condizioni solite per la positività di W, dovremo aggiungere l'altra

$$\nu \geqq 0.$$

Le equazioni a cui dà luogo questa forma dell'energia elastica si ottengono immediatamente.

Osserviamo dapprima che per le componenti delle tensioni le (5) dànno

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu x_x \qquad Y_y = \lambda\theta + 2\mu y_y \qquad Z_z = \lambda\theta + 2\mu z_z$$

ove θ indica la dilatazione cubica.

Queste componenti quindi non differiscono dalle ordinarie. Per le altre si ha

$$\begin{aligned} Y_z &= \mu y_z - \nu r_x & Z_y &= \mu y_z + \nu r_x \\ Z_x &= \mu z_x - \nu r_y & X_z &= \mu z_x + \nu r_y \\ X_y &= \mu x_y - \nu r_z & Y_x &= \mu x_y + \nu r_z \end{aligned}$$

e le equazioni indefinite d'equilibrio (5) si riducono alla forma seguente:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_y}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial y}\right) + \varrho X + \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0 \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_z}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial z}\right) + \varrho Y + \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_x}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial x}\right) + \varrho Z + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Le equazioni (3') al contorno, con le solite riduzioni, divengono

$$\begin{aligned} \lambda\theta\frac{\partial x}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_z\frac{\partial y}{\partial n} - r_y\frac{\partial z}{\partial n}\right) + L = 0 \\ \lambda\theta\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_x\frac{\partial z}{\partial n} - r_z\frac{\partial x}{\partial n}\right) + M = 0 \\ \lambda\theta\frac{\partial z}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_y\frac{\partial x}{\partial n} + r_x\frac{\partial y}{\partial n}\right) + N = 0. \end{aligned}$$

Diverse considerazioni si possono fare intorno a queste equazioni generalizzate dell'equilibrio nel caso dell'isotropia. Ci limiteremo a notare che la forma analitica della parte dei primi membri che dipende da u, v, w non differisce dalla ordinaria. Esse ammettono quindi quelle soluzioni singolari mediante le quali è possibile arrivare alla rappresentazione generale dei loro integrali mediante integrali definiti. Segue da ciò la possibilità di estendere ai campi magnetici di forza i metodi stessi coi quali è possibile ottenere la rappresentazione mediante tensioni elastiche dei campi ordinarî, ed arrivare così alla soluzione generale del problema di cui abbiamo parlato da principio.

In secondo luogo noteremo che le equazioni precedenti, anche quando i momenti M_x, M_y, M_z sono nulli, se la costante ν è differente da zero, non si riducono a quelle ordinarie. Quindi per corpi, pei quali questo fatto si verifica, le leggi di deformazione potranno essere differenti da quelle dedotte dalla teoria ordinaria anche quando le cause della deformazione sono le solite forze o tensioni superficiali.

Questa circostanza potrà forse facilitare la ricerca che si presenta ora spontanea, quella cioè di vedere se esistano in natura materiali, per i quali il coefficiente ν sia differente da zero e, nell'ipotesi favorevole, immaginare dei procedimenti sperimentali atti a determinare i valori di un tale coefficiente.

Astronomia. — *Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione del pianeta Marte fatte nella specola Reale in Milano coll'equatoriale Merz-Repsold durante l'opposizione del 1890.* Memoria VII[a] del Socio G. V. SCHIAPARELLI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Il Segretario MILLOSEVICH nel presentare la VII[ma] Memoria del Socio Senatore GIOVANNI SCHIAPARELLI riguardante le osservazioni e i disegni fatti nell'apparizione del 1890, rileva l'opera insigne compiuta dallo Schiaparelli dal 1827 in poi nei riguardi di Marte e ricorda che, volendo suddividere in periodi le nostre cognizioni sul disco del pianeta, il periodo Schiaparelliano resterà sempre il più insigne come quello che ci rivelò sul disco minimi particolari, i quali pur potranno essere in avvenire più minutamente analizzati e decomposti. L'Accademia dopo alcune parole del Socio F. MARIOTTI e del Vicepresidente F. D'OVIDIO, le quali lumeggiano la grande figura dell'astronomo di Savigliano, delibera d'inviare un telegramma di ringraziamento al Socio Schiaparelli per avere offerto alla nostra Accademia l'ultima sua Memoria sulle sue ricerche sul disco di Marte.