ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

8. Se il corpo ruota intorno ad un asse normale al piano σ_1, che assumeremo come asse delle x, si conserverà costante, in ogni punto di σ oltre al potenziale ψ, il coseno α, come pure il momento $\gamma y - \beta z$; onde la forza F_x sarà ancora espressa dalla formula (5), quindi diretta verso il piano σ_1. Essendo poi, su questo piano, $\gamma y - \beta z = 0$ $(\beta = \gamma = 0)$, il momento delle forze $p\,d\sigma$ rispetto all'asse di rotazione sarà nullo.

9. Notiamo, infine, che se si hanno due corpi uguali limitati dalle superficie σ, σ_0, i quali siano inizialmente, e si conservino, nel loro movimento, simmetrici rispetto ad un piano σ_1, e se la massa liquida occupa lo spazio esterno rispetto ai due corpi; l'azione esercitata sopra uno di essi sarà la stessa come se il piano σ_1 fosse una parete rigida. Se, per conseguenza i due corpi si muovono di moto traslatorio uniforme parallelamente al piano di simmetria, essi saranno attratti l'uno verso l'altro.

Lo stesso avverrà se essi ruotano, con velocità angolari uguali e costanti, intorno ad una retta normale a questo piano; a meno che non siano solidi di rotazione, aventi per asse quella retta: nel qual caso la massa liquida sta in quiete, e sopra i due corpi non viene esercitata alcuna azione.

Matematica. — *Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli*. Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio E. D'OVIDIO.

1. Ricordiamo il teorema di Osgood, relativo al problema più semplice di calcolo delle variazioni. Sia C una curva $y = \varphi(x)$ terminata a due punti A, B che rende minimo l'integrale $\int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx$, dove a, b sono le ascisse di A, B. Ammesse soddisfatte certe ipotesi relative alla funzione f di x, y, y', per la cui precisa enunciazione rinvieremo ai trattati del Bolza [1] e dell'Hadamard [2], vale un teorema, dovuto a Osgood, e che noi enuncieremo nella forma seguente:

Si può determinare un contorno R *di* C, *che soddisfa alla seguente condizione. Per ogni punto* P *di* R *non posto su* C, *esiste un numero positivo e non nullo* $\varepsilon > 0$, *tale che il valore del nostro integrale relativo a una qualsiasi curva* $y = y(x)$ *passante per* P *e terminata ai punti* A, B *supera il valore del nostro integrale relativo alla curva* C *di una quantità non minore di* ε.

Questo teorema non vale per i problemi di variazione relativi a integrali multipli: dal che segue una profonda differenza tra i problemi di variazione

[1] Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, pag. 280.

[2] *Leçons sur le calcul des variations*, p. 477 et suiv.

relativi agli integrali semplici e quelli relativi agli integrali multipli. Ciò non ostante l'esame di alcuni casi più semplici mi persuase che qualche teorema analogo si potesse dimostrare anche per gli integrali multipli; questa previsione trovò conferma nel teorema, a cui sono dedicate le pagine seguenti.

Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione di x, y, z, p, q finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto il campo che considereremo. Se Σ è un pezzo di superficie $z = z(x, y)$ terminato a un *dato* contorno K, noi indicheremo con $J(\Sigma)$ l'integrale $\iint_\sigma f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$, dove si è posto $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, e σ è l'area racchiusa sul piano xy dalla proiezione di K su tale piano.

Sia S un pezzo di superficie $z = \varphi(x, y)$ terminato a K, per cui J(S) ha il minimo valore; più precisamente esista un intorno R di S tale che, se Σ è un pezzo di superficie $z = z(x, y)$ terminato a K e posto in R, si abbia $J(\Sigma) \geq J(S)$.

Supporremo naturalmente soddisfatta in R la condizione di Jacobi: supporremo cioè l'esistenza di un campo di superficie *estremali* per il nostro problema di minimo, tale che per ogni punto di R passi una e una sola superficie estremale del campo considerato. La S faccia parte di questo campo; vale a dire quella delle estremali del nostro campo, che passa per un punto di S, coincida con S. Sia $\psi(x, y, z) = \text{cost}$ l'equazione delle nostre ∞^1 estremali; e sia $\psi(x, y, z) = 0$ l'equazione di S. Sarà identicamente

$$\psi(x, y, \varphi(x, y)) = 0. \tag{1}$$

Siano $\pi, \varkappa$ le derivate di z rispetto a x ed y prese su una di queste superficie estremali. Sarà

$$\pi = -\frac{\psi'_x}{\psi'_z} \;;\quad \varkappa = -\frac{\psi'_y}{\psi'_z}, \tag{2}$$

quando si supponga in R

$$\psi'(z) \neq 0,$$

ipotesi *quasi* equivalente all'altra che per ogni punto di R passi una e una sola estremale $\psi = \text{cost}$ (su cui la z è funzione delle x, y).

Supporremo soddisfatte le condizioni di Legendre e Weierstrass in una forma un po' più restrittiva di quella necessaria, affinchè la S renda proprio minimo il nostro integrale. Più precisamente supporremo che (impicciolendo caso mai l'intorno R), per tutti i valori di x, y, z in R e per valori qualsiasi delle p, q, si abbia

$$f''_{pp} > 0 \quad,\quad f''_{qq} > 0,$$

mentre le espressioni

$$f''_{qq} - \frac{f''^2_{pq}}{f''_{pp}} \geq h \quad \text{e} \quad f''_{pp} - \frac{f''^2_{pq}}{f''_{qq}} \geq k$$

hanno limiti inferiori h, k positivi e differenti da zero. Anzi ci basta supporre che queste condizioni siano soddisfatte per una opportuna scelta delle variabili indipendenti x, y. Se però supponessimo in più che $f''_{pp} f''_{qq} - f''^2_{pq}$ ha un limite inferiore diverso da zero, le condizioni da noi ammesse sarebbero invarianti rispetto a ogni cambiamento di variabili. Ma questa ulteriore limitazione ci è superflua.

Nelle nostre ipotesi, se Σ è un'altra superficie $z = z(x, y)$ terminata a K e posta in R, la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ si può rendere piccola a piacere, anche imponendo a Σ la condizione di passare per un punto A di R, non posto su S. Tanto basta per affermare che il teorema di Osgood non vale per gli integrali che stiamo esaminando. Un fatto analogo si presenta anche se a Σ imponessimo di passare per un numero finito di punti di R, non appartenenti a S. Ma, se invece imponessimo a Σ la condizione di contenere tutto un pezzetto di superficie assegnato e posto in R, allora la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ non potrebbe generalmente più essere ridotta piccola a piacere. Ma il teorema di Osgood, generalizzato in questo modo, diverrebbe affatto banale e di nessun interesse. Però queste osservazioni ci conducono a cercare di generalizzare il teorema di Osgood, indagando se esista qualche classe di gruppi G di punti tali che, se Σ è costretto a contenere i punti di un tale gruppo G, allora la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ non si possa più rendere piccola a piacere. Tali gruppi G dovranno, per così dire, essere intermedii tra i gruppi formati da un numero finito di punti, e i gruppi formati da un pezzetto si superficie. E, da questo punto di vista, l'idea prima che si presenta è quella di esaminare i gruppi G formati dai punti di un pezzetto di una curva. E noi dimostreremo appunto che il teorema di Osgood è generalizzabile in questo senso. Noi dimostreremo anzi un risultato più generale. Per ottenerlo osserviamo che, tanto un gruppo G_1 formato da un numero finito di punti, quanto un gruppo G formato coi punti di un pezzetto di curva, hanno per proiezione sul piano xy gruppi di punti a *misura superficiale* (area) nulla; però tra i gruppi G_1 e G vi è questa differenza essenziale: che, mentre la proiezione di G_1 ha, per così dire, *misura lineare* (lunghezza) nulla, il gruppo G *non è linearmente nullo*. Quest'ultima frase acquista un valore preciso con la seguente definizione:

Diremo che un gruppo G *di punti è linearmente nullo, se i piani* $x = \text{cost}$, *o* $y = \text{cost}$, *che contengono un punto di* G, *formano un gruppo di misura lineare nulla* (¹).

(¹) Questa definizione è simile, ma non del tutto identica, alla analoga definizione data dall'A. al § 2 (pag. 5) della Memoria: *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza* ecc. Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1907, tomo 23.

E noi dimostreremo (ammesse soddisfatte da f e da R le ipotesi sopra enunciate):

Se G *è un gruppo di punti non linearmente nullo, esiste una costante* ε *positiva diversa da zero, definita da* f, S *e dal gruppo* G, *tale che per ogni superficie* Σ, *definita da un'equazione* $z = z(x, y)$, *contenente i punti di* G [1], *e terminata al contorno* K *sia* $J(\Sigma) - J(S) \geq \varepsilon$.

Naturalmente supponiamo che, se $z = z(x, y)$ è l'equazione di Σ, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ siano finite e continue in σ; basterebbe del resto supporre che $\int \frac{\partial z}{\partial x} dx$ e $\int \frac{\partial z}{\partial y} dy$ esistessero, e differissero da z rispettivamente per una funzione della sola y, o della sola x.

Osserviamo che, se il nostro teorema non fosse vero, si potrebbe trovare una successione di superficie Σ_n, definite rispettivamente da un'equazione $z = \varphi_n(x, y)$, terminate a K, e contenenti tutti i punti di G, in guisa che

$$\lim_{n=\infty} [J(\Sigma_n) - J(S)] = 0 \quad \text{ossia} \quad \lim_{n=\infty} J(\Sigma_n) = J(S).$$

Poichè il limite per $n = \infty$ di $J(\Sigma_n)$ è il valore minimo $J(S)$ le superficie $\Sigma_n(z = \varphi_n)$ costituirebbero *una successione minimizzante.* E ciononostante in ogni punto (x, y) del piano xy, proiezione di un punto di G, il valore di $\varphi_n(x, y)$ non varierebbe con n, e sarebbe distinto da $\varphi(x, y)$. Se dunque $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots$ è una *qualunque* successione subordinata alla successione delle φ_n, in tutti questi punti sarebbe $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n}(x, y) \neq \varphi(x, y)$. E questi punti formerebbero un aggregato *non linearmente nullo.*

Noi avremo dunque dimostrato il nostro teorema, se proveremo che nelle nostre ipotesi:

Se $z = \varphi_n(x, y)$ *è una successione minimizzante, si può scegliere una successione subordinata* $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, \ldots$ *tale che* $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n} = \varphi$ *in tutti i punti di* σ, *escluso al più un aggregato di punti linearmente nullo.*

La funzione E di Weierstrass è data dalla

$$E = f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \pi, \varkappa) - (p - \pi) \frac{\partial f(x, y, z, \pi, \varkappa)}{\partial \pi} - (q - \varkappa) \frac{\partial f(x, y, z, \pi, \varkappa)}{\partial \varkappa}$$

che, per la formola di Taylor, si può scrivere:

$$E = \tfrac{1}{2} [R(p - \pi)^2 + 2S(p - \pi)(q - \varkappa) + T(q - \varkappa)^2],$$

[1] Affinchè questo sia possibile, i punti di G devono avere le loro proiezioni sul piano xy, tutte interne a σ; e punti distinti di G devono avere proiezioni distinte. Questa ipotesi è fatta tacitamente in tutta la Nota.

dove R , S , T sono valori intermedii di $f''_{pp}, f''_{pq}, f''_{qq}$. Per le nostre ipotesi

$$R > 0\,, T > 0\,, R - \frac{S^2}{T} \geq k > 0\,, T - \frac{S^2}{R} \geq h > 0\,,$$

cosicchè

$$(R - k)\, T - S^2 \geq 0 \quad , \quad (T - h)\, R - S^2 \geq 0\,.$$

Dalle $R > 0\,, T > 0$ e da queste ultime disuguaglianze si deduce che le forme

$$(R - k)\, \xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2 \quad , \quad R\xi^2 + 2S\xi\eta + (T - h)\,\eta^2$$

nelle variabili $\xi\,, \eta$ non hanno mai valori negativi, comunque si scelgano valori reali per le variabili $\xi\,, \eta$. Quindi:

$$\begin{aligned} 2E &= R(p - \pi)^2 + 2S(p - \pi)\,(q - \varkappa) + T(q - \varkappa)^2 \geq k(p - \pi)^2 \\ 2E & \geq h(q - \varkappa)^2\,; \end{aligned}$$

donde, sommando e indicando con l la minima delle costanti $\frac{k}{4}, \frac{h}{4}$, si trae:

$$E \geq l \,\{(p - \pi)^2 + (q - \varkappa)^2\} \qquad (l = \text{cost}\,;\, l > 0).$$

Ora $J(\Sigma_n) - J(S)$ è per i noti teoremi di Hilbert e Weierstrass eguale all'integrale di E relativo alla superficie Σ_n, vale a dire all'integrale di E esteso a σ ove si ponga $z = \varphi_n\,, p = p_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\,, q = q_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}$. Quindi per l'ultima disuguaglianza si avrà:

$$J(\Sigma_n) - J(S) \geq l \int\!\!\int_\sigma \{(p_n - \pi)^2 + (q_n - \varkappa)^2\}\, dx\, dy\,. \tag{3}$$

Posto

$$\psi Z_n = (x\,, y\,, \varphi_n)\,, \quad P_n = \frac{\partial Z_n}{\partial x}\,, \quad Q_n = \frac{\partial Z_n}{\partial y}$$

sarà:

$$P_n = \frac{\partial Z_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\, p_n$$

$$(z = \varphi_n(x\,, y)\ ;\ \psi = \psi(x\,, y\,, z))$$

donde per le (2)

$$P_n = \frac{\partial \psi}{\partial z}\left[p_n \left(\frac{-\psi'_x}{\psi'_z}\right)\right] = \frac{\partial \psi}{\partial z}\,(p_n - \pi) \qquad (z = \varphi_n).$$

E similmente

$$Q_n = \frac{\partial \psi}{\partial z}\,(q_n - \varkappa) \qquad (z = \varphi_n).$$

Se con M indichiamo il massimo in R della funzione continua $\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|$, sarà dunque

$$|p_n - \pi| \geq \left|\frac{P_n}{M}\right| \qquad |q_n - \varkappa| \geq \left|\frac{Q_n}{M}\right| .$$

E dalla (3) si trarrà:

$$J(\Sigma_n) - J(S) \geq \frac{l}{M}\int\!\!\int_\sigma (P_n^2 + Q_n^2)\, d\sigma .$$

Poichè per le nostre ipotesi il primo membro di questa disuguaglianza ha per $n = \infty$ limite nullo, sarà *a fortiori*

$$\lim_{n=\infty}\int\!\!\int_\sigma (P_n^2 + Q_n^2)\, d\sigma = 0 .$$

Ora sul contorno K è $\varphi_n = \varphi$, poichè S e Σ_n passano tutte per K; sulla sua proiezione sul piano xy, ossia sul contorno di σ sarà dunque per (1)

$$Z_n = \psi(x, y, \varphi_n) = \psi(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{(sul contorno di } \sigma).$$

Le funzioni Z_n costituiscono dunque una *successione minimizzante* per il problema (di minimo) di trovare tra le funzioni nulle sul contorno di σ quella funzione Z (finita e continua insieme alle derivate prime), per cui l'integrale $\int\!\!\int_\sigma (P^2 + Q^2)\, d\sigma \left(P = \frac{\partial Z}{\partial x}, Q = \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ ha il minimo valore. Questa funzione Z è chiaramente la funzione $Z = 0$; e per un teorema dato nella mia Memoria citata si potrà trovare nella successione delle Z_n una successione subordinata $Z_{i_1}, Z_{i_2}, \ldots$ tale che $\lim_{n=\infty} Z_{i_n} = 0$, escluso al più *un aggregato di punti linearmente nullo.* Escluso al più un tale aggregato, sarà dunque $\lim_{n=\infty}\psi(x, y, \varphi_{i_n}) = 0 = \psi(x, y, \varphi)$. Poichè la funzione $\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|$ è continua, e differente da zero, essa ha un minimo non nullo; la precedente uguaglianza dimostra (per il teorema della media) che sarà $\lim_{n=\infty}\varphi_{i_n} = \varphi$ in tutto σ, escluso al più un aggregato linearmente nullo [1] c. d. d.

Questi risultati com'è ben chiaro, fanno anche accrescere la speranza che il cosiddetto principio di minimo di Dirichlet possa ricevere nuove applicazioni, e diventare un ancòra più efficace strumento di ricerca.

[1] Infatti la nostra formola si può scrivere $\psi'_z[\varphi_{i_n} - \varphi] = 0$, dove ψ'_z indica un certo valore di $\frac{\partial\psi}{\partial z}$.