ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* Nota del prof. M. Pannelli, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il Cremona nella seconda delle sue classiche Note: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (¹), basandosi sulla considerazione del numero dei punti doppî delle curve del fascio, che sopra uno dei due piani dati corrisponde ad un fascio di rette dell'altro, ha dimostrato il seguente teorema:

« Se fra i punti di due piani ha luogo una corrispondenza birazionale « con soli punti fondamentali ordinarî, il numero di questi punti è lo stesso « per entrambi i piani ».

Ma di questa proprietà si può dare ancora un'altra dimostrazione.

Suppongasi di avere una rete qualunque di curve d'ordine n, dotata di σ punti-base ordinarî P_l, ciascuno multiplo secondo l. La sua Jacobiana è una curva dell'ordine $3(n-1)$, e possiede ogni punto P_l come punto multiplo ordinario secondo $3l-1$. Quindi il genere π di questa Jacobiana e quello p di una curva della rete, sono dati rispettivamente dalle formule:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2\pi &= (3n-4)(3n-5) - \sum_l (3l-1)(3l-2) \\ 2p &= (n-1)(n-2) - \sum_l l(l-1) \end{aligned}$$

dalle quali segue subito:

« Il genere π della Jacobiana di una rete qualunque di curve di ge- « nere p, dotata di σ punti fondamentali ordinari, è somministrato dalla « espressione:

$$\pi = 9p - \sigma + 1 \text{ ».}$$

In particolare, se la rete data è omaloidica, si ha $p=0$, e quindi in virtù del teorema precedente, applicabile *in ogni caso*, quando come genere della Jacobiana s'intenda *sempre* il numero calcolato per mezzo della formula (1), si trova:

$$(2)\qquad \pi = 1 - \sigma .$$

D'altra parte la data rete omaloidica definisce una corrispondenza birazionale fra i punti del piano in cui essa giace e quelli di un altro piano,

(¹) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, t. V, ser. 2ª.

e se si indica con σ' il numero dei punti fondamentali di quest' ultimo piano, la Jacobiana della rete si compone [1] di σ' curve razionali, due qualunque delle quali non s' intersecano fuori dei punti fondamentali. Quindi il genere π di questa Jacobiana può determinarsi ancora, applicando la formula con cui si calcola il genere di una curva composta, genere di cui la definizione è in accordo con quella dianzi data in ogni caso per la Jacobiana stessa. In tal modo si ottiene:

$$\pi = 1 - \sigma'.$$

Dal confronto di questa formula con la (2) segue il teorema del Cremona, sopra ricordato.

2. Se le considerazioni precedenti si ripetono per lo spazio ordinario, si giunge a stabilire una relazione notevole fra gli elementi fondamentali di due spazî, i cui punti siano legati fra loro da una corrispondenza birazionale.

La dimostrazione di questa relazione costituisce l'oggetto della presente Nota.

Suppongasi di avere un sistema lineare triplamente infinito di superficie S d'ordine n, di cui la base sia formata da σ punti P_l e da τ curve C_i. Ogni punto P_l sia multiplo (ordinario) secondo l per ciascuna superficie S, e il cono in esso tangente alla superficie medesima vari col variare di questa nel sistema dato. Inoltre ogni curva C_i, d'ordine m_i e di rango r_i, sia multipla (ordinaria) secondo i per ciascuna superficie S, e gli i piani tangenti in uno stesso punto di C_i alla superficie medesima varino tutti col variare di questa nel sistema dato. Infine ogni curva C_i si appoggi ad ogni altra curva $C_j (j \geq i)$ in k_{ij} punti e passi per ogni punto P_l con j_{il} rami.

La Jacobiana del sistema dato è una superficie dell'ordine $4(n-1)$ e possiede ogni punto P_l come punto multiplo secondo $4l-2$ ed ogni curva C_i come curva multipla secondo $4i-1$.

Il genere aritmetico Π di questa superficie, quello P di una superficie S del sistema, l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques relativo alla superficie medesima e il genere p della curva d'intersezione, fuori delle curve fondamentali, di due superficie S, sono rispettivamente date dalle formule:

$$\begin{aligned}6\Pi = {} & 64n^3 - 288n^2 + 428n - 210 - \sum_l (64l^3 - 144l^2 + 104l - 24) \\ & - \sum_i [(192i^2 - 144i + 24)\, n - (128i^3 + 144i^2 - 164i + 30)]\, m_i \\ & + \sum_i (64i^3 - 72i^2 + 26i - 3)\, r_i \\ & + \sum_{ij} [(192i^2 - 144i + 24)\, j - (64i^3 - 28i + 6)]\, k_{ij} \\ & + \sum_{il} [(192i^2 - 144i + 24)\, l - (128i^3 - 56i + 12)]\, j_{il}\end{aligned}$$

[1] Cremona, loc. cit, nn. 6 ed 11.

$$6P = n^3 - 6n^2 + 11n - 6 - \sum_l (l^3 - 3l^2 + 2l)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - 3i)\, n - (2i^3 + 3i^2 - 5i)]\, m_i + \tfrac{1}{2} \sum_i (2i^3 - 3i^2 + i)\, r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - 3i)\, j - (i^3 - i)]\, k_{ij} + \sum_{il} [(3i^2 - 3i)\, l - (2i^3 - 2i)]\, j_{il}$$

$$\Omega = n^3 - 8n^2 + 16n + 1 - \sum_l (l^3 - 4l^2 + 4l)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - 4i + 1)\, n - (2i^3 + 4i^2 - 6i)]\, m_i + \sum_i (i^3 - 2i^2 + i)\, r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - 4i + 1)\, j - (i^3 - i)]\, k_{ij}$$
$$+ \sum_{il} [(3i^2 - 4i + 1)\, l - (2i^3 - 2i)]\, j_{il}$$

$$p = n^3 - 2n^2 + 1 - \sum_l (l^3 - l^2)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - i)\, n - (2i^3 + i^2)]\, m_i + \tfrac{1}{2} \sum_i (2i^3 - i^2)\, r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - i)\, j - i^3]\, k_{ij} + \sum_{il} [(3i^2 - i)\, l - 2i^3]\, j_{il}.$$

Dalle formule precedenti segue facilmente l'altra:

(3) $$\Pi = 4P + 4\Omega + 6p + 4\sigma + 5\mu - \tfrac{1}{2} \sum_i r_i - \sum_{ij} k_{ij} - 2\lambda - 41$$

nella quale si è posto:

$$\mu = \sum_i m_i \qquad \lambda = \sum_{il} j_{il}.$$

Ora il genere ϱ_i di una curva C_i è dato dalla formula:

$$\varrho_i = \tfrac{1}{2} r_i - m_i + 1,$$

da cui, posto ancora:

(4) $$\varrho = \sum \varrho_i + \sum_{ij} k_{ij} - \tau + 1$$

segue:

$$\mu - \tfrac{1}{2} \sum r_i - \sum_{ij} k_{ij} = -\varrho + 1.$$

In virtù di questa eguaglianza dalla (3) si deduce:

« Il genere aritmetico Π della Jacobiana di un sistema lineare triplamente infinito di superficie S è dato dalla formula:

$$\Pi = 4P + 4\Omega + 6\varrho + 4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda - 40$$

« dove $P, \Omega, p, \sigma, \mu, \varrho$ e λ hanno i significati dianzi stabiliti ».

3. In particolare, suppongasi che il sistema dato sia omaloidico. In tal caso si ha intanto: $P = 0$ e $p = 0$. Inoltre il sistema stesso definisce una corrispondenza birazionale fra i punti dello spazio $\sum$ cui esso appartiene e quelli di un altro spazio $\sum'$. Quindi se si indica con μ' la somma degli ordini di tutte le curve fondamentali di $\sum'$, una superficie S corrispondendo ad un piano di $\sum'$, contiene μ' curve eccezionali, epperò l'invariante di Castelnuovo-Enriques ad essa relativo è dato dalla formula:

$$\Omega = 10 - \mu'. \tag{5}$$

Ciò nell'ipotesi, tacitamente ammessa anche nel numero precedente, in cui lo spazio $\sum$ non contenga punti fondamentali semplici per le superficie S, poichè per ognuno di questi punti l'invariante Ω aumenta di una unità.

In questa ipotesi dal teorema del num. prec. si deduce intanto:

$$\Pi = -4\mu' + 4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda. \tag{5'}$$

D'altra parte la Jacobiana del sistema dato si compone delle τ' superficie $R_{i'}$ e delle σ' superficie $T_{l'}$ di $\sum$ corrispondenti alle τ' curve fondamentali $C'_{i'}$ ed ai σ' punti fondamentali $P'_{l'}$ di $\sum'$, ogni superficie $T_{l'}$ dovendo essere contata *due* volte [1] se, come qui si suppone, il sistema omaloidico di $\sum'$ soddisfa alle medesime condizioni imposte al sistema di superficie S considerato nel n. 2. Quindi il genere aritmetico Π può essere determinato ancora applicando alla superficie $\sum_{i'} R_{i'} + \sum_{l'} 2T_{l'}$, la formula con cui si calcola il genere aritmetico di una superficie composta. In tal modo e riguardando momentaneamente la superficie composta $\sum R_{i'}$ come una superficie unica, R, si trova:

$$\begin{aligned}\Pi = g.a.\mathrm{R} &+ 2\sum_{l'} g(\mathrm{RT}_{l'}) + \sum_{l'} g(\mathrm{T}_{l'}\,\mathrm{T}_{l'}) + 4\sum_{l'k'} g(\mathrm{T}_{l'}\,\mathrm{T}_{k'}) \\ &+ \sum_{l'}(\mathrm{RT}_{l'}\,\mathrm{T}_{l'}) + \sum_{l'k'}(\mathrm{RT}_{l'}\,\mathrm{T}_{k'}) + \sum_{l'k'}(\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{k'}) - \binom{2\sigma'}{2},\end{aligned} \tag{6}$$

dove $g.a.\mathrm{R}$ indica il genere aritmetico della superficie R, i simboli $g(\mathrm{AB})$ ed (ABC) denotano rispettivamente il genere della curva e il numero dei punti d'intersezione, fuori degli elementi fondamentali, di due superficie A e B o di tre superficie A, B, C, e l'indice k', deve, come l', variare da 1 sino a σ', ma in ciascuno dei simboli $(\mathrm{T}_{l'}\,\mathrm{T}_{k'})$, $(\mathrm{RT}_{l'}\,\mathrm{T}_{k'})$, $(\mathrm{T}_{l'}\,\mathrm{T}_{l'}\,\mathrm{T}_{k'})$ non può assumere il medesimo valore di l'.

a) In virtù dello stesso teorema sul genere aritmetico di una superficie composta, testè applicato, si ha:

$$g.a.\mathrm{R} = g.a.\sum \mathrm{R}_{i'} = \sum g.a.\mathrm{R}_{i'} + \sum g(\mathrm{R}_{i'}\,\mathrm{R}_{j'}) + \sum(\mathrm{R}_{i'}\,\mathrm{R}_{j'}\,\mathrm{R}_{k'}) - \binom{\tau' - 1}{2} \tag{7}$$

[1] Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, § IV, Annali di Matematica, ser. II, t. V.

dove ciascuno degli indici i', j', h' deve variare da uno sino a τ'; ma quelli che si trovano nello stesso simbolo $(R_{i'} R_{j'})$ e $(R_{i'} R_{j'} R_{k'})$ debbono assumere valori differenti.

Una superficie $R_{i'}$ contiene un fascio costituito dalle curve (razionali) corrispondenti ai punti della curva $C'_{i'}$; quindi, dette $\varrho'_{i'}$ il genere di questa curva, il genere aritmetico della superficie $R_{i'}$ è $-\varrho'_{i'}$.

Se una curva $C'_{i'}$ si appoggia ad ogni altra curva $C'_{j'}$ $(j' \geq i')$ in $k'_{i'j'}$ punti, le due superficie $R_{i'}$ e $R_{j'}$ hanno in comune, fuori delle fondamentali, $k'_{i'j'}$ curve razionali, due qualunque delle quali non hanno punti comuni; quindi il genere della curva $(R_{i'} R_{j'})$ è $-k'_{i'j'}+1$, epperò si ha:

(8) $$\sum g(R_{i'} R_{j'}) = -\sum k'_{i'j'} + \binom{\tau'}{2}.$$

Infine tre superficie $R_{i'}, R_{j'}, R_{h'}$ non hanno punti comuni, fuori degli elementi fondamentali; quindi è:

$$\sum(R_{i'} R_{j'} R_{h'}) = 0.$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini della formula (7); così posto:

$$\varrho' = \sum \varrho'_{i'} + \sum k'_{i'j'} - \tau' + 1$$

si trova:

$$g.a.R = -\varrho'.$$

b) Se ogni curva $C'_{i'}$ passa con $j'_{i'l'}$ rami per ogni punto $P'_{l'}$, e se si indica con λ' la somma $\sum_{i'l'} j'_{i'l'}$, come la formula (8), così si ottiene la seguente:

$$\sum g(RT_{l'}) = -\lambda' + \sigma'.$$

c) Due superficie $T_{l'}$ e $T_{k'}$ non si tagliano fuori delle curve fondamentali; mentre una superficie $R_{i'}$ e una superficie $T_{l'}$ s'incontrano in $j'_{i'l'}$ curve razionali due qualunque delle quali non s'incontrano, fuori dei punti P_l, e il grado di intersezione con se stessa di ciascuna di esse, considerata sulla superficie $R_{i'}$, è zero. Si ha pertanto:

$$\sum(RT_{l'} T_{l'}) = 0 \ , \ \sum(RT_{l'} T_{k'}) = 0 \ , \ \sum(T_{l'} T_{l'} T_{k'}) = 0.$$

d). Infine è da porre [1]:

$$g(T_{l'} T_{l'}) = 3 \ , \ g(T_{l'} T_{k'}) = 1$$

[1] Il valore 3, che deve essere attribuito al simbolo $g(AB)$, quando le due superficie A e B coincidono entrambe con la superficie $T_{l'}$, risulta dal confronto della formula che dà il genere aritmetico di una superficie, che sia somma di altre superficie *tutte* distinte fra loro, con quella che somministra il genere aritmetico della superficie stessa,

donde segue:

$$\sum_{i'} g(\mathrm{T}_{i'}\mathrm{T}_{i'}) = 3\sigma' \ , \ \sum g(\mathrm{T}_{i'}\mathrm{T}_{k'}) = \binom{\sigma'}{2} \, .$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini del secondo membro della (6); quindi sostituendo, si trova:

$$\Pi = -\varrho' - 2\lambda' + 4\sigma'.$$

Dal confronto di questa formula con la (5′) si deduce:

« Se fra i punti di due spazi $\sum$ e $\sum'$ ha luogo una corrispondenza bi- « razionale, i cui elementi fondamentali soddisfino alle condizioni imposte ad « essi nel n. 2, fra gli elementi stessi ha luogo la relazione seguente:

$$4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda = 4\sigma' + 4\mu' - \varrho' - 2\lambda'$$

« dove σ è il numero dei punti e μ l'ordine della curva composta da tutte « le curve, che insieme con quei punti costituiscono gli elementi fondamen- « tali di $\sum$, λ il numero totale dei rami di queste curve che passano per « quei punti ed infine ϱ è definito dalla formula (4). I simboli σ', μ', λ', ϱ' « hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali di $\sum'$ ».

Nel dimostrare questo teorema si è supposto che lo spazio $\sum$ non contenesse punti fondamentali semplici. Si toglie facilmente siffatta restrizione osservando: 1°) Un punto semplice, come tale, non può avere alcuna influenza sul valore dell'invariante Ω, e quindi nella formula data nel n. 2 con la quale si calcola l'invariante stesso, la somma $\sum$ non deve essere estesa ai punti fondamentali semplici, epperò il numero s di questi punti non è compreso in quello σ dei punti fondamentali multipli che figura nella formula (3). 2°) L'invariante Ω aumenta di una unità per ogni punto della superficie, che si trasforma in una curva eccezionale, epperò in luogo della formula (5) si ha l'altra:

$$\Omega = 10 - \mu' + s \, .$$

4. Come il teorema del Cremona, ricordato in principio, si estende alle superficie [1], così il teorema testè dimostrato si può estendere alle varietà

---

nell'ipotesi in cui *due* delle sue componenti coincidano fra loro, come dimostrerò in un'altra Nota non potendolo far qui, per ristrettezza di spazio.

In modo analogo si determina il valore 1 da attribuirsi al simbolo $g(\mathrm{AB})$, quando le due superficie A e B coincidono rispettivamente con le superficie $\mathrm{T}_{i'}$ e $\mathrm{T}_{k'}$, le quali non s'intersecano fuori degli elementi fondamentali.

[1] Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, n. 7, Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI (1896).

a tre dimensioni. Su questa estensione, che è implicitamente contenuta in una mia precedente Nota [1], e su qualche altra relazione che oltre a quella qui stabilita, probabilmente esiste fra gli elementi fondamentali di una trasformazione birazionale, spero di poter ritornare in seguito.

Matematica. — *Sopra una proprietà dei polinomi sferici.* Nota del prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra i polinomi di grado n della forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

Tchebychef ha determinato quello per il quale il massimo dei valori assoluti nell'intervallo $(-1, +1)$ è minimo: posto $x = \cos\varphi$, esso è dato dall'espressione

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n\varphi) \quad [2]. \tag{2}$$

È noto però che nelle pratiche applicazioni interessa il più sovente aver riguardo ai valori medî; quindi, in particolare, quel che occorre di rendere il più possibile prossimo a zero non è la deviazione locale, ma bensì il cosiddetto *valore efficace* (radice quadrata della media dei quadrati), vale a dire l'espressione

$$v_n = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_n^2 \, dx}\,. \tag{3}$$

La questione, implicitamente contenuta in un'altra più generale pure studiata da Tchebychef [3], si può risolvere con mezzi elementari, perchè, come si vede subito, si tratta di un ordinario problema di minimo, risguardando come variabili indipendenti i coefficienti del polinomio P_n che si vuol determinare. Ma è anche più semplice ed elegante risolvere indirettamente la questione, riattaccandola a classiche proprietà dei polinomi sferici. A ciò è dedicata la presente Nota, nella quale si mettono a confronto le deviazioni

[1] *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, Redic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XV (1906).

[2] Tchebychef, *Oeuvres*, t. I. pag. 299, St. Petersbourg, 1907. Il Liebmann, seguendo un procedimento elementare, arriva ad una dimostrazione molto semplice della stessa proprietà; H. Liebmann, *Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tchebychef*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, XVIII, 1909, Heft 9/10, pp. 433-437.

[3] Tchebychef, *Oeuvres*, t. II, pp. 377-402.