ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

a tre dimensioni. Su questa estensione, che è implicitamente contenuta in una mia precedente Nota [1], e su qualche altra relazione che oltre a quella qui stabilita, probabilmente esiste fra gli elementi fondamentali di una trasformazione birazionale, spero di poter ritornare in seguito.

Matematica. — *Sopra una proprietà dei polinomi sferici.* Nota del prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra i polinomi di grado n della forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n , \tag{1}$$

Tchebychef ha determinato quello per il quale il massimo dei valori assoluti nell'intervallo $(-1 \, , +1)$ è minimo: posto $x = \cos\varphi$, esso è dato dall'espressione

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n\varphi) \quad [2]. \tag{2}$$

È noto però che nelle pratiche applicazioni interessa il più sovente aver riguardo ai valori medî; quindi, in particolare, quel che occorre di rendere il più possibile prossimo a zero non è la deviazione locale, ma bensì il cosiddetto *valore efficace* (radice quadrata della media dei quadrati), vale a dire l'espressione

$$v_n = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_n^2 \, dx} \, . \tag{3}$$

La questione, implicitamente contenuta in un'altra più generale pure studiata da Tchebychef [3], si può risolvere con mezzi elementari, perchè, come si vede subito, si tratta di un ordinario problema di minimo, risguardando come variabili indipendenti i coefficienti del polinomio P_n che si vuol determinare. Ma è anche più semplice ed elegante risolvere indirettamente la questione, riattaccandola a classiche proprietà dei polinomi sferici. A ciò è dedicata la presente Nota, nella quale si mettono a confronto le deviazioni

[1] *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, Redic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XV (1906).

[2] Tchebychef, *Oeuvres*, t. I. pag. 299, St. Petersbourg, 1907. Il Liebmann, seguendo un procedimento elementare, arriva ad una dimostrazione molto semplice della stessa proprietà; H. Liebmann, *Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tchebychef*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, XVIII, 1909, Heft 9/10, pp. 433-437.

[3] Tchebychef, *Oeuvres*, t. II, pp. 377-402.

locali e i valori efficaci che spettano rispettivamente ai polinomi P_n e T_n, dando un criterio numerico per apprezzare, al variare del grado n, i vantaggi degli uni in confronto degli altri, a seconda del punto di vista adottato. Ho potuto così mettere in luce un'importante proprietà dei polinomi di Tchebychef, vale a dire che sebbene essi non facciano discendere il valore efficace proprio al minimo, non lo superano per più del 15 %, il valore relativo dell'eccesso convergendo assintoticamente verso $\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1$ (13 % circa), al crescere indefinito di n. Invece per i polinomi P_n la massima deviazione locale pur decrescendo rapidamente al crescere di n, supera di molto il minimo di Tchebychef, il relativo rapporto essendo dell'ordine di $\sqrt{n}$.

1. Indichiamo con X_n il polinomio sferico di grado n: esso è dato dalla formola

$$X_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2 - 1)^n \} . \tag{4}$$

I polinomi sferici godono, come è noto, delle seguenti proprietà:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0 , \quad (m \gtrless n), \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} . \tag{6}$$

Oltre a ciò, se Q è un polinomio qualunque di grado inferiore ad n, abbiamo dalla (5), oppure mediante integrazione per parti,

$$\int_{-1}^{+1} Q X_n \, dx = 0 . \tag{7}$$

I polinomi

$$P_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \cdot X_n \tag{8}$$

godono essi pure, come è chiaro, della proprietà (5) e quindi anche della (7).

Dalla (4) risulta tosto che P_n è della forma (1) ed è facile riconoscere che fra i polinomi di grado n di questa forma, è desso precisamente quello che rende minima l'espressione (3).

Indichiamo con f_n un polinomio *qualunque* della forma (1): basterà evidentemente dimostrare che

$$\int_{-1}^{+1} (f_n^2 - P_n^2) \, dx$$

è positivo o nullo. A tal uopo si osservi che f_n si può sempre considerare come una combinazione lineare dei polinomi P_n; possiamo porre cioè

$$f_n = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1} + P_n ,$$

o, più brevemente,

$$f_n = Q_{n-1} + P_n , \tag{9}$$

ove $Q_{n-1} = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1}$ è un polinomio di grado $n - 1$ al più. Dalla (9) abbiamo

$$f_n^2 - P_n^2 = Q_{n-1}^2 + 2 Q_{n-1} P_n$$

e quindi

$$\int_{-1}^{+1} (f_n^2 - P_n^2)\, dx = \int_{-1}^{+1} Q_{n-1}^2\, dx + 2 \int_{-1}^{+1} Q_{n-1} P_n\, dx .$$

Il primo integrale del secondo membro, ove non sia nullo, è essenzialmente positivo: mentre, per le suaccennate proprietà dei polinomi P_n,

$$\int_{-1}^{+1} Q_{n-1} P_n\, dx = 0 .$$

Dalle (6) e (8) segue immediatamente

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2\, dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{\{(2n)!\}^2 \cdot (2n+1)}$$

e si ha quindi, pel minimo cercato, l'espressione:

$$v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}} . \tag{10}$$

2. Il valore efficace w_n, relativo all'intervallo $(-1, +1)$, che compete al polinomio T_n di Tchebychef, è dato, per definizione, dalla

$$w_n^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} T_n^2\, dx ,$$

ovvero, avuto riguardo alla (2) e posto $x = \cos \varphi$, dalla

$$w_n^2 = \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2 (n\varphi) \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi .$$

Un calcolo molto semplice conduce alla formola

$$w_n^2 = \frac{2n^2 - 1}{2^{2n-2} \cdot (4n^2 - 1)} .$$

Determiniamo l'espressione del rapporto $r_n = \frac{w_n}{v_n}$. Dalla precedente e dalla (10) si ha

$$r_n = 2\sqrt{\frac{2n^2-1}{2n-1} \cdot \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}\,, \tag{11}$$

e, in particolare,

$$r_1 = 1\ ,\ r_2 = \frac{\sqrt{21}}{4}\ ,\ r_3 = \frac{\sqrt{85}}{8}\,, \tag{12}$$

dalle quali risulta che

$$r_1 < r_2 < r_3\,.$$

Si riconosce poi facilmente che $r_{n+1} < r_n$ per $n \geq 3$, e quindi che r_n decresce sempre al crescere indefinito di n a partire da r_3.

È noto d'altronde [1] che

$$\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi n} \cdot e^{\frac{4\vartheta - \vartheta'}{24n}}\,, \tag{13}$$

ove ϑ e ϑ' sono numeri positivi minori dell'unità: per cui la (11) si può mettere sotto la forma:

$$r_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2n^2-1}{2n^2-n}} \cdot e^{\frac{\vartheta' - 4\vartheta}{24n}}\,.$$

Questa ci dice che $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ e quindi che

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{w_n - v_n}{v_n} = \lim_{n=\infty}(r_n - 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1\,.$$

Se dunque nel calcolo del valore efficace si sostituisce a P_n il polinomio di Tchebychef, l'errore relativo, $r_n - 1$, diminuisce sempre, a misura che n aumenta, a partire da $n = 3$, tendendo al limite $\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1$. Da ciò e dalle (12) si può concludere che detto errore non può mai superare $\frac{\sqrt{85}}{8} - 1$, (15 % circa).

3. Indichiamo con d_n la deviazione locale di P_n e con t_n quella di T_n, nell'intervallo $(-1\ ,\ +1)$. Dalle (2) e (8), tenendo presente che il massimo di X_n nell'intervallo $(-1\ ,\ +1)$ è l'unità, si ha:

$$t_n = \frac{1}{2^{n-1}}\ \ ,\ \ d_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\,, \tag{14}$$

(1) E. Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 480.

entrambe infinitesime al crescere indefinito di n. Notiamo subito che $d_1 = t_1$, e che per $n > 1$, $d_n > t_n$.

Per confrontare le due deviazioni consideriamo il loro rapporto $\varrho_n = \dfrac{d_n}{t_n}$. Dalla (14) abbiamo

$$\varrho_n = \frac{1}{2}\,\frac{4^n (n\,!)^2}{(2n)!}\,.$$

Da questa e dalla (13) si vede che il valore assintotico di ϱ_n è

$$\varrho_n = \sqrt{\frac{\pi n}{4}} \cdot e^{\frac{4\mathfrak{J} - \mathfrak{J}'}{24n}}\,,$$

e quindi che il rapporto ϱ_n cresce indefinitamente con n ed è dell'ordine di $\sqrt{n}$.

Fisica terrestre. — *Le anomalie costiere di gravità e la teoria elastica dell'isostasi.* Nota di LUIGI DE MARCHI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

È noto che la distribuzione della gravità ridotta al mare, mentre manifesta una generale compensazione fra le attrazioni delle masse superficiali e quelle delle masse profonde ad esse sottostanti, rivela tuttavia, fra altre irregolarità, una anomalia costante lungo le coste dei mari profondi (¹). Procedendo dall'interno del continente verso la costa la gravità cresce, raggiunge un massimo non lungi dalla costa, diminuisce rapidamente fino a un minimo, situato in mare non molto lontano dalla terra, per risalire poi lentamente verso l'alto mare fino a raggiungere al largo sull'oceano il suo valore normale.

Recentemente il prof. Helmert prese a fondamento questo fatto per un calcolo approssimato della *profondità di compensazione* (²), cioè della profondità di una superficie sferica che sarebbe premuta uniformemente dal peso della costa sovraincombente, secondo la teoria di Pratt, e trovò un valore che corrisponde assai esattamente a quello che Tittmann ed Hayford avevano dedotto, per via affatto diversa, dalle deviazioni del filo a piombo

(¹) Un'esposizione chiara dei problemi che ad essi si collegano è data dall'ingegnere O. Zanotti Bianco, *La gravità alla superficie del mare e l'ipotesi di Pratt secondo alcuni lavori recenti*, fasc. I-II, gennaio-febbraio 1910, della Rivista geografica italiana.

(²) Helmert F. R., *Die Tiefe der Ausgleichfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten*, Sitzungsberichte Akad. Berlin, 25 nov. 1909.