ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

entrambe infinitesime al crescere indefinito di n. Notiamo subito che $d_1 = t_1$, e che per $n > 1$, $d_n > t_n$.

Per confrontare le due deviazioni consideriamo il loro rapporto $\varrho_n = \frac{d_n}{t_n}$. Dalla (14) abbiamo

$$\varrho_n = \frac{1}{2} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} .$$

Da questa e dalla (13) si vede che il valore assintotico di ϱ_n è

$$\varrho_n = \sqrt{\frac{\pi n}{4}} \cdot e^{\frac{4\mathfrak{I} - \mathfrak{I}'}{24n}} ,$$

e quindi che il rapporto ϱ_n cresce indefinitamente con n ed è dell'ordine di $\sqrt{n}$.

Fisica terrestre. — *Le anomalie costiere di gravità e la teoria elastica dell'isostasi.* Nota di Luigi De Marchi, presentata dal Socio Levi-Civita.

È noto che la distribuzione della gravità ridotta al mare, mentre manifesta una generale compensazione fra le attrazioni delle masse superficiali e quelle delle masse profonde ad esse sottostanti, rivela tuttavia, fra altre irregolarità, una anomalia costante lungo le coste dei mari profondi [1]. Procedendo dall'interno del continente verso la costa la gravità cresce, raggiunge un massimo non lungi dalla costa, diminuisce rapidamente fino a un minimo, situato in mare non molto lontano dalla terra, per risalire poi lentamente verso l'alto mare fino a raggiungere al largo sull'oceano il suo valore normale.

Recentemente il prof. Helmert prese a fondamento questo fatto per un calcolo approssimato della *profondità di compensazione* [2], cioè della profondità di una superficie sferica che sarebbe premuta uniformemente dal peso della costa sovraincombente, secondo la teoria di Pratt, e trovò un valore che corrisponde assai esattamente a quello che Tittmann ed Hayford avevano dedotto, per via affatto diversa, dalle deviazioni del filo a piombo

(1) Un'esposizione chiara dei problemi che ad essi si collegano è data dall'ingegnere O. Zanotti Bianco, *La gravità alla superficie del mare e l'ipotesi di Pratt secondo alcuni lavori recenti*, fasc. I-II, gennaio-febbraio 1910, della Rivista geografica italiana.

(2) Helmert F. R., *Die Tiefe der Ausgleichfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten,* Sitzungsberichte Akad. Berlin, 25 nov. 1909.

negli Stati Uniti del Nord. Questo notevole risultato è giustamente considerato come un nuovo argomento in favore della teoria isostatica.

D'altro lato l'ipotesi colla quale Pratt giustifica l'isostasi, ammettendo che tutti i movimenti che determinarono le irregolarità della superficie terrestre si sarebbero compiuti secondo la verticale, senza spostamenti laterali, è in aperta contradizione coi dati della Geologia che, specialmente nella teoria ora dominante delle *nappes de recouvrement*, constaterebbe l'esistenza di immensi scorrimenti orizzontali.

Avendo recentemente [1] tentato di spiegare le dislocazioni tectoniche con spostamenti elastici e avendo in tale occasione dimostrato che tali spostamenti possono dar ragione dell'isostasi [2], mi parve interessante ricercare se anche le anomalie costiere possano riannodarsi alla stessa teoria. È un tentativo puramente teorico, che non ammette valutazioni quantitative, ma che pur non mi sembra privo di interesse, in quanto dimostra la *possibilità* di conciliare i fatti scoperti dai geodeti con quelli scoperti dai geologi. Credo opportuno ripetere qui che a risultati non essenzialmente diversi si arriverebbe nell'ipotesi di lentissimi moti vischiosi, che sembrano meglio rispondenti alla costituzione reale del nostro globo.

Considero ancora il caso di un suolo elastico piano, che viene deformato per il trasporto di masse materiali da una zona ad un'altra, che supporremo rettilinee e parallele. Assumiamo il piano come piano xy, essendo l'asse delle z verticale e diretto verso il basso, cioè nell'interno della massa, e l'asse delle y nella direzione delle due zone.

Sia Θ la dilatazione elastica determinata dalla deformazione in un punto qualunque della massa, di coordinate $\xi\,\eta\,\zeta$. Indicando con ϱ la densità, la variazione di massa in quel punto è $-\varrho\Theta$, e il potenziale che essa induce in un punto fisso O, di coordinate $x\,y\,z$ è $-\dfrac{\varrho\Theta}{r}$, ove r è la distanza dei due punti. Considerando la massa come omogenea, il potenziale totale indotto nel punto O da tutte le variazioni di densità che si verificano nella massa è

$$V = -\varrho \int \frac{\Theta dS}{r}$$

e la componente verticale dell'anomalia gravimetrica sarà (f costante di attrazione)

$$\Delta_1 g = f\frac{\partial V}{\partial z} = f\varrho \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS\,. \tag{1}$$

[1] De Marchi, *Teoria elastica delle dislocazioni terrestri*, in Rend. Accad. Lincei, Roma, 1907, vol. XVI, serie 5ª, pp. 384 e seg.

[2] Id., *La teoria elastica dell'isostasi terrestre*, id., pp. 970 e seg.

Indicando con u, v, w le componenti dello spostamento elastico, si può scrivere, secondo le formole generali dell'elasticità [1], pel caso dell'assenza di forze di massa

$$(2) \qquad 4\pi B w = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

ove B è la seconda costante di isotropia, e

$$(3) \quad \Phi = (A - B) \int \frac{\Theta dS}{r} + B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{ds}{r},$$

$$(4) \quad W = \int \frac{N ds}{r} + B \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{d\xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\zeta}{dn} ds + B \int w \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds;$$

essendo A l'altra costante di isotropia, N la componente secondo l'asse delle z della forza superficiale deformante, ed essendo il primo integrale della (3) esteso a tutto il volume e tutti gli altri a tutta la superficie del corpo, la cui normale positiva n si intende diretta verso l'interno della massa.

Dalla prima delle (3) e dalla (1) si ricava

$$(A - B) \frac{1}{\varrho f} \Delta_1 g = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} ds,$$

e per la (2),

$$(A - B) \frac{1}{\varrho f} \Delta_1 g = W - 4\pi B w - B \int \left(u \frac{d\xi}{dn} + v \frac{d\eta}{dn} + w \frac{d\zeta}{dn} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} ds.$$

Nel caso nostro è u funzione della sola ξ, $v = 0$ e inoltre

$$\frac{d\xi}{dn} = 0 \quad \frac{d\zeta}{dn} = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{d}{dn}$$

e quindi

$$(5) \quad (A - B) \frac{1}{\varrho f} \Delta_1 g = \int \frac{N ds}{r} - 4\pi B w + B \int u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} ds + B \int w \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds.$$

Le formole (2-4) sono valide per tutti i punti $x\,y\,z$ interni alla massa; volendo quindi il valore di Δg in un punto vicino quanto si vuole alla superficie dovremo far tendere a zero la z dai valori positivi. Osserviamo che l'ultimo termine della (5) è un potenziale di doppio strato che per

[1] Cesàro E. *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Torino, 1894, pag. 105.

$z=0$ è identicamente nullo, mentre al passaggio dai valori positivi della z ai valori superficiali presenta un salto di $-2\pi w$. Per valori positivi, ma piccoli quanto si vuole, di z esso ha quindi il valore $2\pi w$. Indicando, come nella seconda delle Memorie citate, il primo integrale con ψ, ricordiamo [1] che

$$w=\frac{A}{4\pi B(A-B)}\psi-\frac{z}{4\pi B}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

e quindi per z piccola quanto si vuole

$$\psi=\frac{4\pi B(A-B)}{A}w. \tag{6}$$

Sostituendo questi valori nella (5) abbiamo finalmente

$$(A-B)\frac{1}{\varrho f}\Delta g=2\pi\frac{B}{A}(A-2B)\,w+B\int u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds. \tag{7}$$

Nell'ultimo integrale u è funzione della sola ξ; ponendo quindi $ds=d\xi\, d\eta$ esso sarà

$$\int_{-\infty}^{\infty}u\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta.$$

Ma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta=(x-\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{r^3}.$$

Ponendo

$$z^2+(x-\xi)^2=q^2$$

si può scrivere

$$\frac{1}{r^3}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{q^2 r}\right)$$

epperò, essendo r sempre positivo,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta=\left[\frac{1}{q^2}\frac{\eta-y}{|\eta-y|}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{(\eta-y)^2}}}\right]_{\eta=-\infty}^{\eta=\infty}(x-\xi)=\frac{2}{q^2}(x-\xi).$$

L'ultimo termine della (7) equivale quindi a

$$\lim_{z=0}\left[2B\int_{-\infty}^{\infty}u\frac{x-\xi}{q^2}d\xi\right].$$

[1] *Teoria elastica* ecc., formola (3).

Dalla prima delle mie due Memorie citate [1] appare che nel caso che le forze superficiali deformatrici siano limitate a due strisce parallele di larghezza piccolissima, lo spostamento orizzontale u è diverso da zero, e costante, nella zona compresa fra le due striscie, mentre è nulla al di là di queste. Quest'ultima condizione è, per il principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti, verificata anche nel caso di una distribuzione continua di forze deformatrici N entro una zona limitata, colla sola condizione che esse siano tutte posirive da un lato e tutte negative dall'altro lato dell'asse delle y, assumendo come tale la retta ove $N = 0$. Questo caso risponde alle condizioni di una zona costiera, alleggerita in terra dalla degradazione e aggravata in mare dall'accumulazione [2].

Anche in tal caso si ha in superficie uno spostamento orizzontale dalla zona alleggerita alla zona premuta, mentre oltre i limiti di esse la u è nulla. L'integrale precedente deve quindi limitarsi ai valori della ξ compresi entro queste due zone, e la u in questo intervallo è variabile, ma ha sempre lo stesso segno. Prendendo come direzione positiva delle ξ quella che va dalla zona alleggerita verso la premuta (dal continente verso il mare) la u entro la zona risulta sempre positiva. Indicando allora con u_m un valore medio di u opportunamente scelto e notando che

$$\frac{x-\xi}{q^2} = \frac{\partial \log \frac{1}{q}}{\partial \xi}$$

l'integrale precedente si potrà scrivere, per il teorema della media

$$u_m \lim_{z=0} \int_{-a}^{+b} \frac{\partial \log \frac{1}{q}}{\partial \xi}\, d\xi,$$

ove $-a$ è il limite esterno della zona alleggerita e $+b$ quello della zona compressa.

Siano $q_1\, q_2$ le distanze del punto O, che supponiamo sulla superficie, rispettivamente dal limite $-a$ (in terra) e $+b$ (in mare). La (7) allora diventa

$$(8) \qquad \Delta_1 g = 2\pi\varrho f \, \frac{B}{A}\, \frac{A-2B}{A-B}\, w + \frac{2B}{A-B}\, \varrho f u_m \log \frac{q_1}{q_2},$$

la quale ci esprime l'anomalia di gravità indotta in ogni punto della superficie dalle variazioni di densità che si verificano nella massa. Essa è valida

[1] *Teoria* ecc., pag. 293.

[2] De Marchi, *Applicazioni geologiche della teoria elastica* ecc. Rendiconti Accad. Lincei, 7 aprile 1907, pag. 499.

per tutti i punti entro e fuori la zona di sollecitazione, esclusi due segmenti infinitesimi che ne abbracciano gli estremi.

In essa non è tenuto conto dell'anomalia proveniente dalle variazioni del campo occupato dalle masse. Queste variazioni dànno luogo ad una crosta superficiale di spessore variabile w, sopra e sotto il piano iniziale, e che determina un campo di attrazione positiva dove w è negativa, e viceversa. Inoltre, dove w è positiva, dobbiamo aggiungere il campo determinato dallo strato d'acqua di spessore variabile h.

Indicando con c la parte di superficie dove $w < 0$ (continente), con σ quella dove $w > 0$ (oceano), il potenziale di queste variazioni è

$$V = \varrho \int_c \frac{w_2 dc}{r} - \varrho \int_\sigma \frac{w_1 d\sigma}{r} + \int_\sigma \frac{h d\sigma}{r} = V_1 - V_2 + V_3,$$

ponendo 1 la densità dell'acqua. La profondità del mare h è la somma dello spostamento positivo w_1 nel punto considerato e dello spostamento negativo w_2 rispondente alla linea di costa. L'anomalia completa è

$$\Delta g = \Delta_1 g + f \frac{\partial V}{\partial z} = W + U$$

ove

$$W = 2\pi\varrho f \frac{B}{A} \frac{A - 2B}{A - B} w + f \frac{\partial V}{\partial z}$$

dipende solo dagli spostamenti verticali su tutta la superficie, mentre U, che è l'ultimo termine della (8), dipende solo dagli spostamenti orizzontali nella zona sollecitata. Se il punto O é molto interno nel continente i termini dipendenti da V_2 e V_3 sono trascurabili e il termine dipendente da V_1 assume il valore (essendo g l'accelerazione di gravità, R il raggio terrestre, ϱ_0 la densità media della terra)

$$\frac{3}{2} g \frac{w}{R} \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{3}{2}\left(f \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_0 \frac{1}{R^2}\right) \frac{w_2}{R} \frac{\varrho}{\varrho_0} = 2\pi f w_2 \varrho,$$

ove w_2, valore assoluto di w, è il sollevamento continentale. Ivi sarà quindi

$$W_c = 2\pi f \varrho \left\{ 1 - \frac{B}{A} \frac{A - 2B}{A - B} \right\} w_2 .$$

Per valori normali delle costanti di elasticità questo valore è positivo.

Ponendo infatti il coefficiente di Poisson $\mu = \frac{1}{3}$ è $A = 4B$ e

$$W_c = \tfrac{5}{3} \pi f \varrho w_2,$$

che esprime l'anomalia continentale per le regioni abbastanza lontane dalla zona di sollecitazione, perchè si possa ammettere $U = 0$.

Analogamente in alto mare è trascurabile il termine dipendente da V_1 e quelli dipendenti da $V_2\,V_3$ diventano

$$-2\pi f\varrho w_1 + 2\pi f h$$

e

$$W_\sigma = 2\pi f\varrho\left\{\frac{B}{A}\,\frac{A-2B}{A-B} - 1\right\} w_1 + 2\pi f h\,,$$

dove il primo termine è negativo. Assumendo come gravità normale la gravità nell'interno del continente al livello del mare, e ponendo che anche in alto mare sia $U = 0$ l'anomalia in alto mare è

$$\Delta_m g = W_\sigma - W_c = 2\pi f\left\{\frac{B}{A}\,\frac{A-2B}{A-B}\,\varrho - (\varrho-1)\right\} h\,.$$

Per $\varrho = 2{,}8$ e $\mu = \frac{1}{3}$ essa è negativa ed eguale a $-2{,}6\pi f h$. In unità assolute (cm., gr., sec.) è $f = 6{,}67.10^{-8}$: per $h = 4000$ m. è quindi $\Delta g = -0{,}2$: siamo quindi nell'ordine di grandezza delle anomalie realmente osservate.

Nel passaggio dal continente all'oceano attraverso la zona costiera, subaerea e subacquea, la Δg deve diminuire regolarmente, se la h cresce in modo continuo. Ma a questa variazione dovuta esclusivamente ai moti verticali si aggiunge quella dovuta agli spostamenti orizzontali, rappresentata dall'ultimo termine della (8). Questo termine è nullo sull'asse mediano della zona di sollecitazione, ove $q_1 = q_2$, e si mantiene piccolo in un intorno abbastanza ampio attorno a quest'asse neutro; ma, quando ci avviciniamo ai due limiti della zona di perturbazione, può assumere valori assai rilevanti, tendendo teoricamente all'infinito nei limiti stessi.

L'anomalia che esso determina è negativa sul continente ($q_1 < q_2$) positiva in mare ($q_1 > q_2$) e a sufficiente prossimità dei confini essa prevarrà sull'anomalia indotta dagli spostamenti verticali, determinando un minimo in una zona parallela a quella di massimo sollevamento, un massimo in una zona parallela a quella di massimo sprofondamento. Il primo fatto può dar ragione delle zone di anomalia negativa che seguono le catene montuose; il secondo può forse dar ragione delle eccezionali anomalie positive delle isole d'alto oceano.

Il meccanismo generatore di queste anomalie dovute agli scorrimenti orizzontali è di facile comprensione. Sul limite continentale della zona di sollecitazione si inizia lo scorrimento verso il mare, senza afflusso compensatore dalla terra, e quindi vi è dilatazione; sul limite oceanico si arresta tale scorrimento, e quindi vi è condensazione. Già Helmert attribuì a scorrimenti orizzontali le anomalie che non si accordano coll'ipotesi di Pratt.

Queste due forti anomalie, negativa in terra e positiva in mare, sovrapponendosi alla regolare diminuzione che si stabilirebbe dalla terra al mare, per semplice effetto degli spostamenti verticali, e delle variazioni del campo che ne conseguono, vengono inoltre a determinare un massimo secondario sulla terra in vicinanza del mare, e un minimo secondario in mare presso la terra. Potrebbe così giustificarsi anche l'anomalia costiera, che mi diede impulso a questa ricerca.

Fisica. — *Sulla origine di alcune gravi anomalie recentemente osservate nello studio del fenomeno Zeeman.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Uno dei più importanti risultati ottenuti di recente nello studio del fenomeno di Zeeman, riguarda la disuguaglianza notevole fra la distanza delle componenti esterne del *triplet* osservato nel senso normale alle linee di forza e quella tra le componenti del *doublet* visibile nel senso del campo. Questa disuguaglianza, osservata dal Tenani (¹) e poi ritrovata indipendentemente dal Nagaoka (²), è inconciliabile con la interpretazione cinematica del fenomeno Zeeman (³) e con la teoria elementare di Lorentz; ma non è nemmeno d'accordo con la teoria di Voigt, che la prevede solo in misura estremamente più piccola e accompagnata da una dissimetria del *triplet*; mentre secondo il Tenani esisterebbe la disuguaglianza sopra indicata, ma non la dissimetria del *triplet* che ne dovrebbe esser la causa.

Di fronte a un simile risultato si sarebbe indotti a ritenere quasi *a priori* che possa averlo determinato qualche causa disturbatrice. Una di queste si presenta spontanea alla mente, e venne già esaminata dal Tenani per consiglio del Cotton. Sembra cioè ben naturale il pensare che ricorrendo, come egli ha fatto, a masse polari di cui una provvista di un foro per l'osservazione longitudinale, le luci osservate provengano da parti della sorgente luminosa situate in regioni del campo ove questo abbia intensità sensibilmente diverse. Contro questa spiegazione si possono contrapporre due considerazioni:

1. Pare anzitutto poco probabile che nel breve spazio occupato dalla scintilla o dalla parte capillare del tubo Geissler il campo presenti varia-

(¹) Rend. Lincei, 18, pag. 677, 1909; 19, pag. 198, 1910.
(²) Nature, agosto 1909, pag. 188.
(³) Tutte le altre anomalie e dissimmetrie di posizione e d'intensità finora constatate (v. anche Dufour, Journ. de Phys., aprile 1910) rispettano ancora la corrispondenza tra il fenomeno Zeeman longitudinale e quello trasversale, qual'è espressa dalla logge di Cornu, che cioè i due fenomeni sarebbero le apparenze diverse secondo le quali le *medesime* vibrazioni circolari o rettilinee, orientate in modo fisso nello spazio, sono viste nelle diverse direzioni.