ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sull'equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet sul piano.* Nota del Corrispondente Giuseppe Lauricella.

Nella mia precedente comunicazione: *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare* (¹) dimostravo l'esistenza di infinite linee piane chiuse, che chiamavo *speciali*, tali che per ognuna di esse il nucleo dell'equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet è non chiuso, ossia tali che esiste su ciascuna di esse uno strato semplice avente valori nulli nei suoi punti; e davo ancora dei criterî che possono servire ogni volta a verificare se la linea piana che si considera è speciale o no.

Qui mi occupo della costruzione dello strato semplice che risolve il problema di Dirichlet, ossia della risoluzione della detta equazione integrale di 1ª specie. Ordinariamente questo problema si risolve per i campi a tre dimensioni, trasformando il doppio strato che risolve il problema stesso di Dirichlet in strato semplice. Nella presente Nota, applicando la teoria delle equazioni integrali di 1ª specie, dimostro che la questione proposta equivale alla trasformazione del doppio strato, avente per densità la funzione arbitrariamente data, in strato semplice.

(¹) Questi Rendiconti, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910 (6 marzo), pp. 250-260.

Della trasformazione di un doppio strato in strato semplice mi sono occupato per il caso delle tre dimensioni ([1]), applicando la teoria di Fredholm. Il caso delle due dimensioni, a causa delle singolarità che presenta, sopra tutto se la linea è speciale, va trattato a parte; e questo appunto qui faccio nei §§ 3, 4, 5, applicando ancora la teoria di Fredholm.

In fine, rammentando che i coefficienti dello sviluppo della funzione incognita di un'equazione integrale di 1ª specie in serie di funzioni ortogonali possono sempre esprimersi, come osservai nella mia Nota: *Sopra alcune equazioni integrali* ([2]), mediante i coefficienti della funzione data, trovo la condizione necessaria e sufficiente per la validità di tale sviluppo, il quale serve a dare una rappresentazione analitica diretta della soluzione del problema proposto.

Dovendo, in ciò che segue, richiamare spesso alcuni risultati sulle equazioni integrali di 1ª specie, contenuti nella mia Nota ora citata e nelle altre due: *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate* ([3]); *Sull'equazione integrale di 1ª specie* ([4]), denoterò rispettivamente queste Note con L_1, L_2, L_3.

Circa alle notazioni adotterò qui quelle introdotte nella Nota sui potenziali logaritmici.

Equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet.

1. Sia $\chi(s)$ una funzione finita e continua dei punti nella linea C. Supponiamo che esista uno strato:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \varphi(s) \log r \, ds ,$$

la cui densità sia funzione finita e continua, tale che nei punti di C si abbia:

$$\Phi(s') = \chi(s'),$$

ossia:

$$\chi(s') = \frac{1}{2\pi} \int_C \varphi(s) \log r' \, ds . \tag{15}$$

Allora, in virtù della continuità della $\varphi(s)$, esisteranno e saranno finite

([1]) *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica.* Nuovo Cimento, serie 5ª, vol. XIII, 1907.

([2]) Questi Rendiconti, vol. XVII, serie 5ª, 1° sem. 1908, pp. 775-786.

([3]) Questi Rendiconti, vol. XVII, serie 5ª, 2° sem. 1908, pp. 193-204.

([4]) Ibid., vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. 1909, pp. 71-75.

e continue lungo C (cfr. Nota precedente, § 1) le espressioni $\frac{\overline{d\Phi}}{dn}$, $\frac{\overline{\overline{d\Phi}}}{dn}$; e quindi sussisteranno le note formole [1]:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \chi(s)\frac{d\log r}{dn}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\overline{\overline{d\Phi}}}{dn}\log r\,ds\,,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma') \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \chi(s)\frac{d\log r}{dn}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\overline{d\Phi}}{dn}\log r\,ds\,.$$

Posto:

$$W(\xi\,,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C \chi(s)\,\frac{d\log r}{dn}\,ds\,,$$

queste formole ci dicono che, se l'equazione integrale di 1ª specie (15) ammette una soluzione $\varphi(s)$ finita e continua, il doppio strato $W(\xi\,,\eta)$ potrà trasformarsi in strato semplice logaritmico tanto nel campo finito σ, quanto in quello infinito σ'.

2. Viceversa supponiamo che il doppio strato $W(\xi\,,\eta)$ possa trasformarsi in strato semplice logaritmico:

$$V(\xi\,,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C v(s)\log r\,ds$$

nel campo σ e in uno strato semplice logaritmico:

$$V'(\xi\,,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C v'(s)\log r\,ds$$

nel campo σ'.

Posto:

$$\overline{W} = \lim_{P=s'} W \quad , \quad \overline{\overline{W}} = \lim_{P'=s'} W\,,$$

si ha, come è noto,

$$\overline{W} - \overline{\overline{W}} = -\chi(s')\,;$$

e quindi, in forza dell'ipotesi fatta, potrà scriversi:

$$V(s') - V'(s') = \overline{W} - \overline{\overline{W}}\,,$$

ossia:

$$\chi(s') = \frac{1}{2\pi}\int_C \{v'(s) - v(s)\}\log r'\,ds\,. \tag{16}$$

[1] La formola (5) della Nota precedente vale anche quando le funzioni A e B nel campo σ' si comportano come strati semplici logaritmici. Infatti basterà osservare che, in virtù delle (10), (11) di quella Nota, i termini della forma $\frac{\log\varrho}{\varrho}$ nello sviluppo di $B\frac{dA}{d\varrho} - A\frac{dB}{d\varrho}$ si eliminano.

Si introduca la serie di funzioni ortogonali:

(17) $$\psi_1(s)\,,\,\psi_2(s)\,,\ldots$$

e la corrispondente serie di costanti:

(17)′ $$\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\ldots\,,$$

tali che:

(18) $$\psi_i(s') = \frac{\lambda_i}{2\pi}\int_C \psi_i(s)\log r'\,ds\,.$$

Da questa equazione risulta intanto che *le* $\psi_i(s)$ *sono finite e continue lungo* C.

Si ha ancora che *la serie* (17) [e quindi anche la (17)′] *è infinita.* Infatti l'equazione integrale:

(19) $$\int_C \theta(s)\log r'\,ds = 0$$

non ammette alcuna soluzione effettiva [1] quando la linea C non è speciale, ed ammette una sola soluzione effettiva $v_1(s)$ quando C è speciale; mentre se la serie (17) fosse finita la (19) dovrebbe ammettere infinite soluzioni effettive, come risulta dalla teoria delle equazioni integrali [2].

Ciò premesso, si ha, in virtù delle (16), (18),

$$a_i = \int_C \chi(s)\,\psi_i(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_C\int_C \{v'(s') - v(s')\}\,\psi_i(s)\log r'\,ds\,ds' =$$

$$= \int_C \{v'(s') - v(s')\}\,ds'\,\frac{1}{2\pi}\int_C \psi_i(s)\log r'\,ds = \frac{1}{\lambda_i}\int_C \{v'(s') - v(s')\}\,\psi_i(s')\,ds'.$$

Le costanti $\lambda_i\,a_i$ sono allora i coefficienti relativi allo sviluppo dell'espressione $v'(s') - v(s')$ in serie delle funzioni $\psi_i(s')$; e quindi la serie $\sum_1^\infty{}_i\,\lambda_i^2\,a_i^2$ sarà convergente, in virtù del noto teorema di Riesz.

Se la curva C non è speciale, ciò è necessario e sufficiente per concludere che l'equazione integrale di 1ª specie (15) ammetterà una soluzione [3], la quale sarà data dalla formola:

$$\varphi(s) = v'(s) - v(s)\,.$$

[1] Conformemente alla nomenclatura introdotta nella mia Nota: *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIX, 1° sem. 1910, pp. 155-163], chiameremo *soluzione effettiva* dell'equazione integrale (19) ogni soluzione che è diversa da zero in punti di un insieme di misura non nulla.

[2] Vedi la Nota L_1, § 6; e la Nota L_2, Art. I, § 1.

[3] Picard, Comptes rendus, 14 juin 1909.

Se la curva C è speciale, bisogna aggiungere l'altra condizione [1]:

$$\int_C \chi(s')\, v_1(s')\, ds' = 0 . \tag{20}$$

E questa è essa pure verificata dalla $\chi(s)$. Infatti, rammentando che nel caso di C linea speciale si ha per definizione:

$$\frac{1}{2\pi}\int_C v_1(s') \log r'\, ds' = 0 ,$$

dalla (16) risulterà appunto:

$$\int_C \chi(s')\, v_1(s')\, ds' = \int_C \{v'(s) - v(s)\}\, ds \frac{1}{2\pi}\int_C v_1(s') \log r'\, ds' = 0 .$$

Per cui anche nel caso in cui la linea C è speciale, l'equazione integrale di 1ª specie (15) ammetterà una soluzione, la quale sarà data dalla formola [2]:

$$\varphi(s) = v'(s) - v(s) + \alpha\, v_1(s)$$

con α costante arbitraria.

Riassumendo si ha dunque il seguente riultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista uno strato semplice logaritmico a densità finita e continua, il quale nei punti di C *coincida con la funzione finita e continua* $\chi(s)$, *arbitrariamente data, è che il doppio strato* $W(\xi, \eta)$ *avente per densità la* $\chi(s)$ *possa trasformarsi in strato semplice tanto nel campo finito* σ, *quanto in quello infinito* σ'. *Note le densità degli strati semplici in cui si trasforma* $W(\xi, \eta)$ *nei due campi* σ, σ', *sarà pure nota la densità dello strato semplice richiesto.*

Trasformazione di un doppio strato in strato semplice.

3. Sia $\chi(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C. Proponiamoci di trasformare nell'area finita σ il doppio strato $W(\xi, \eta)$ in uno strato semplice $V(\xi, \eta)$, la cui densità $v(s)$ sia una funzione finita e continua.

Supposta l'esistenza della funzione $v(s)$, si avrà che esiste ed è finita e continua lungo C la $\overline{\dfrac{dV}{dn}}$; quindi esisterà la $\overline{\dfrac{dW}{dn}}$ e sarà anch'essa finita e continua.

Si supponga inversamente che esista e sia finita e continua lungo C

(1) Vedi la Nota L_3, § 3.
(2) Vedi la Nota L_3, § 4.

la $\overline{\dfrac{dW}{dn}}$. Consideriamo l'equazione integrale di 2ª specie (di Fredholm):

$$2\,\overline{\frac{dW}{dn'}} = v(s') + 2\int_C \alpha(s', s)\,.\,v(s)\,ds \tag{21}$$

e le corrispondenti equazioni integrali omogenee e coniugate (6), (7) della precedente Nota. Come ivi fu dimostrato, l'equazione (6) ammette una sola soluzione $w_1(s) = \text{cost} \neq 0$; quindi, in virtù della teoria di Fredholm, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (21) ammetta una soluzione è che si abbia:

$$\int_C w_1(s)\,\overline{\frac{dW}{dn}}\,ds = w_1(s)\int_C \overline{\frac{dW}{dn}}\,ds = 0\,.$$

Poichè $W(\xi, \eta)$ è funzione armonica nel campo σ, questa relazione sarà certamente verificata; ed allora, indicando con $v^*(s)$ una soluzione dell'equazione integrale (21), con $v_1(s)$ la densità del solito strato semplice $V_1(\xi, \eta)$ avente valore costante ($= H$) nei punti di C, e con β una costante arbitraria, avremo per la soluzione più generale della medesima equazione (21):

$$v(s) = v^*(s) + \beta\,.\,v_1(s)\,.$$

In virtù della proprietà del nucleo $\alpha(s', s)$, la $v(s)$ sarà, come la $v^*(s)$ e la $v_1(s)$, finita e continua lungo C.

Ciò premesso, si consideri lo strato $V(\xi, \eta)$ avente per densità la funzione $v(s)$. Si ha, in virtù della (1) della precedente Nota e della (21),

$$\overline{\frac{dV}{dn'}} = \frac{1}{2}\,v(s') + \int_C v(s)\,.\,\alpha(s', s)\,ds = \overline{\frac{dW}{dn'}}\,;$$

sicchè, qualunque sia il valore della costante β, le funzioni $V(\xi, \eta)$, $W(\xi, \eta)$ nei punti di σ differiranno fra di loro al più per una costante addittiva; onde, indicando con $V^*(\xi, \eta)$ lo strato semplice logaritmico avente per densità la funzione $v^*(s)$ e con A una quantità costante, potremo scrivere:

$$V(s') - \overline{W} = V^*(s') + \beta H - \overline{W} = A\,. \tag{22}$$

Se la linea C non è speciale, sarà $H \neq 0$; per cui la costante A varierà al variare della costante β, e si potrà determinare quindi β in modo che risulti $A = 0$, ossia:

$$V(s') - \overline{W} = 0\,.$$

Allora si avrà:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad V(\xi, \eta) = W(\xi, \eta)\,.$$

Abbiamo così il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè nel campo σ, limitato da una linea non speciale C, *il doppio strato* $W(\xi, \eta)$ *possa trasformarsi in strato semplice a densità continua, è che esista e sia finita e continua lungo* C *la* $\overline{\dfrac{dW}{dn}}$.

4. Se la curva C è speciale, sarà $H = 0$; e la (22) potrà scriversi:

$$V(s') - \overline{W} = V^*(s') - \overline{W} = A; \tag{22$'$}$$

quindi si avrà:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad V(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) + A,$$

con A costante determinata ed indipendente da β. Poichè la linea C è speciale, non esisterà uno strato semplice distribuito lungo di essa e avente nei suoi punti valore costante diverso da zero; quindi se A è diverso da zero, il problema di trasformare il doppio strato $W(\xi, \eta)$ in strato semplice è impossibile.

Ora si ha, come è noto,

$$\overline{W} = -\frac{1}{2}\chi(s') + \int_C \alpha(s, s')\, \chi(s)\, ds;$$

per cui la (22)$'$ diviene:

$$2V(s') = -\chi(s') + 2\int_C \alpha(s, s')\, \chi(s)\, ds + 2A.$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per $v_1(s')\, ds'$ e integrando a tutto il campo C, si ha:

$$2\int_C V(s') . v_1(s')\, ds' = -\int_C \chi(s') . v_1(s')\, ds +$$

$$+ 2\int_C \int_C \alpha(s, s')\, \chi(s)\, v_1(s')\, ds\, ds' + 2A \int_C v_1(s')\, ds';$$

e poichè:

$$2\int_C V(s') . v_1(s')\, ds' = \frac{1}{\pi}\int_C \int_C v(s)\, v_1(s') \log r'\, ds\, ds' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_C v(s)\, ds \int_C v_1(s') \log r'\, ds' = 2H \int_C v(s)\, ds = 0,$$

e poichè ancora, in virtù della (7) della precedente Nota,

$$2\int_C \int_C \alpha(s, s')\, \chi(s)\, v_1(s')\, ds\, ds' =$$

$$= 2\int_C \chi(s)\, ds \int_C \alpha(s, s')\, v_1(s')\, ds' = -\int_C \chi(s) . v_1(s)\, ds,$$

risulterà

$$\int_C \chi(s) \, . \, v_1(s) \, ds = A \int_C v_1(s) \, ds \,,$$

dalla quale, essendo [1]:

$$\int_C v_1(s) \, ds \neq 0 \,,$$

si ricava che condizione necessaria e sufficiente, affinchè sia $A = 0$, è che la funzione data $\chi(s)$ soddisfaccia all'equazione:

$$\int_C \chi(s) \, . \, v_1(s) \, ds = 0 \,. \tag{23}$$

Abbiamo dunque il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè nel campo finito σ, *limitato da una linea speciale* C, *il doppio strato* $W(\xi \, , \eta)$ *possa trasformarsi in strato semplice a densità continua, è che esista e sia finita e continua lungo* C *la* $\dfrac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$ *e che la densità* $\chi(s)$ *di* $W(\xi \, , \eta)$ *verifichi la* (23).

5. Si voglia ora trasformare nell'area infinita σ' il doppio strato $W(\xi \, , \eta)$ in strato semplice $V'(\xi \, , \eta)$ a densità $v'(s)$ finita e continua, sia la linea C speciale o no.

Anche qui si può notare che se esiste la $v'(s)$, l'espressione $\dfrac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$ esisterà certamente e sarà finita e continua lungo C.

Viceversa supponiamo che esista e sia finita e continua lungo C la $\dfrac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$. Si consideri l'equazione integrale di 2ª specie (di Fredholm):

$$2 \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'} = - v'(s') + 2 \int_C \alpha(s' \, , s) \, . \, v'(s) \, ds \tag{21'}$$

e le corrispondenti equazioni integrali omogenee coniugate:

$$0 = - w_1'(s') + 2 \int_C w_1'(s) \, . \, \alpha(s \, , s') \, ds \,, \tag{6'}$$

$$0 = - v_1'(s') + 2 \int_C v_1'(s) \, . \, \alpha(s' \, , s) \, ds \,. \tag{7'}$$

[1] Vedi la Nota precedente, § 5.

Sia $v_1'(s)$ una soluzione dell'equazione (7)'. La $v_1'(s)$ sarà finita e continua, in virtù delle proprietà del nucleo $\alpha(s', s)$; quindi dello strato semplice:

$$\mathrm{V}_1'(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{C}} v_1'(s) \log r \, ds$$

esisteranno e saranno finite e continue le espressioni $\frac{\overline{d\mathrm{V}_1'}}{dn}, \frac{\overline{\overline{d\mathrm{V}_1'}}}{dn}$, e dalle formole (1), (2) della precedente Nota risulterà, tenuto conto della (7)',

$$(24) \qquad \frac{\overline{\overline{d\mathrm{V}_1'}}}{dn'} = -\frac{1}{2} v_1'(s') + \int_{\mathrm{C}} v_1'(s) \,.\, \alpha(s', s) \, ds = 0 \,,$$

$$(25) \qquad \frac{\overline{d\mathrm{V}_1'}}{dn'} = \frac{1}{2} v_1'(s') + \int_{\mathrm{C}} v_1'(s) \,.\, \alpha(s', s) \, ds = v_1'(s') \,.$$

Si ha poi:

$$0 = \int_{\mathrm{C}} \frac{d\mathrm{V}_1'}{dn} \, ds = \int_{\mathrm{C}} v_1'(s) \, ds \,;$$

sicchè la funzione $\mathrm{V}_1'(\xi, \eta)$ è armonica nel campo σ', e quindi varrà per essa la formola (3') della precedente Nota, la quale, in virtù della (24), ci darà:

$$\int_{\sigma'} \Delta \mathrm{V}_1' \, d\sigma' = 0 \,.$$

Di qui, avuto riguardo che la $\mathrm{V}_1'(\xi, \eta)$ si annulla all'infinito, risulta:

$$\mathrm{V}_1'(\xi, \eta) = 0$$

in tutti i punti del piano; e per conseguenza, tenuto conto della (25),

$$(\text{nei punti di C}) \quad v_1'(s) = 0 \,.$$

Adunque le (6)', (7)' non ammettono alcuna soluzione effettiva [1]; e quindi l'equazione integrale (21)' ammetterà una soluzione ed una solamente, che sarà finita e continua lungo C.

Si costruisca con questa soluzione $v'(s)$ lo strato semplice:

$$\mathrm{V}'(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{C}} v'(s) \log r \, ds \,.$$

Si ha, in forza della (21)',

$$(26) \qquad \frac{\overline{\overline{d\mathrm{V}'}}}{dn'} = -\frac{1}{2} v'(s') + \int_{\mathrm{C}} v'(s) \,.\, \alpha(s', s) \, ds = \frac{\overline{\overline{d\mathrm{W}}}}{dn'} \,;$$

[1] La dimostrazione di questa proposizione data da Fredholm nella sua Nota: *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, n. 1, Stockholm, pp. 39-46) richiede maggiori condizioni sulla natura della linea C.

e poichè:

$$\int_C \frac{d\overline{\overline{W}}}{dn'}\, ds' = 0 \ , \ \int_C \frac{d\overline{V'}}{dn'}\, ds' = 0 \, ,$$

$$\frac{d\overline{V'}}{dn'} - \frac{d\overline{\overline{V_1}}}{dn'} = v'(s') \, ,$$

risulterà:

$$\int_C v'(s')\, ds' = 0 \, ;$$

e perciò la $V'(\xi, \eta)$ sarà armonica nel campo σ', appunto come la $W(\xi, \eta)$. In forza della (26) avremo dunque:

$$(\text{nei punti di } \sigma') \quad V'(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \, .$$

Si ha così il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè nel campo infinito σ' il doppio strato $W(\xi, \eta)$ possa trasformarsi in strato semplice a densità finita e continua, è che esista e sia finita e continua lungo C la $\dfrac{d\overline{\overline{W}}}{dn}$.

Esistenza e sviluppabilità della densità $\varphi(s)$.

6. Da tutto ciò che precede risulta che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale di 1ª specie* (15), *nella quale la funzione data $\chi(s)$ è finita e continua, ammetta una soluzione $\varphi(s)$ finita e continua, ossia affinchè esista uno strato semplice logaritmico a densità $\varphi(s)$ finita e continua, il quale nei punti di C coincida con la funzione data $\chi(s)$, è che il doppio strato $W(\xi, \eta)$, avente per densità la funzione $\chi(s)$, abbia le due derivate normali $\dfrac{d\overline{W}}{dn}, \dfrac{d\overline{\overline{W}}}{dn}$ finite e continue lungo* C [1], *e inoltre che nel caso di C linea speciale la funzione $\chi(s)$ verifichi l'equazione* (23).

[1] In virtù del noto teorema di Liapounoff, che qui potremmo dimostrare usufruendo dei calcoli del § 5 (Cfr. per le tre dimensioni la mia citata Memoria del Nuovo Cimento, cap. III, § 14), basterà che esista e sia finita e continua lungo C una sola delle due espressioni $\dfrac{d\overline{W}}{dn}, \dfrac{d\overline{\overline{W}}}{dn}$. Rammentiamo ancora che si conoscono delle condizioni, per la funzione $\chi(s)$, sufficienti affinchè ciò avvenga (Vedi ad es. la mia Nota: *Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato*, inserita in questi Rendiconti, vol. XIV, 1° sem., serie 5ª, fasc. 2°, anno 1905, pp. 70-75).

7. Dimostrata l'esistenza della soluzione finita e continua $\varphi(s)$ dell'equazione integrale di 1ª specie (15), risulta, in forza del noto teorema di Hilbert-Schmidt,

$$\chi(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i \psi_i(s),$$

in cui la serie al secondo membro è uniformemente convergente.

Posto allora:

$$V_i(\xi, \eta) = \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_C \psi_i(s) \log r\, ds,$$

si avrà, in virtù della (18),

$$V_i(s') = \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_C \psi_i(s) \log r'\, ds = \psi_i(s');$$

e quindi, applicando un noto teorema del Volterra sopra le serie di funzioni armoniche (¹), risulterà lo sviluppo:

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i V_i(\xi, \eta).$$

8. Per ciò che riguarda la sviluppabilità in serie di funzioni $\psi_i(s)$ della densità $\varphi(s)$, si può dire (²) che i coefficienti dello sviluppo sono $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2, \ldots$ e che *se la serie* $\sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i \lambda_i \psi_i(s)$, *moltiplicata per* $\log r'$, *è integrabile termine a termine nel campo* C, *si avrà*:

$$\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i\, \lambda_i\, \psi_i(s). \tag{27}$$

Se poi rammentiamo che, supposte soddisfatte per la funzione $\chi(s)$ le condizioni del teorema al § 6, la soluzione $\varphi(s)$ dell'equazione integrale (15), è certamente finita e continua, avremo, in forza di un teorema sugli sviluppi in serie di funzioni ortogonali (³), che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè nei punti di* C *sussista la* (27), *è che la serie* $\sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i \lambda_i \psi_i(s)$ *sia quasi uniformemente convergente nel campo* C.

(¹) *Sopra alcuna condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa* (Annali di Matematica, Serie II, Tomo XI, 1882-83, pp. 3-55).

(²) Vedi la Nota L_1, § 4_1.

(³) Vedi la mia citata Nota del Circolo matematico di Palermo, § 10, *β*).