ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ghiamoci in modo più preciso con un esempio. Supponiamo una ninfa che non abbia ancora gli ocelli e che abbia l'occhio composto fornito di pochissime faccette e un breve accenno delle ali; gli ovarii che erano ancora lontani dalla maturazione e che fino a quel momento si erano andati sviluppando lentamente, per effetto di stimoli provenienti dall'esterno, rapidamente ingrandiscono, sottraendo alimento o almeno certe sostanze alle altre parti; questo fenomeno occasiona la quarta muta, prima che i varî organi siano evoluti come nelle alate e li arresta definitivamente nel loro sviluppo. Così si comprende quel singolare arresto nei più differenti gradi di sviluppo, che a tutta prima non sembrerebbe spiegabile altrimenti che col disuso. Esso devesi dunque ritenere occasionato dall'ingrandimento rapido delle uova, che alla sua volta deve essere provocato da stimoli esterni (modificazioni delle qualità del nutrimento fornito dalla pianta al parassita). Siccome, contemporaneamente al crescere delle uova, si completano i gonodotti, fors'anche questi concorrono a determinare l'arresto di sviluppo.

La tesi da me qui sostenuta è applicabile in generale a tutte le rudimentazioni, non ne sono però occasione sempre e solo gli organi genitali.

Già nel caso dei sessuali delle Fillosserine è meno evidente che anche la scomparsa degli stiletti, del labbro inferiore, della pompetta salivare ecc. siano riferibili alle gonadi, perchè questi organi si sviluppano precocemente, prima che la larva esca dall'uovo. In altri casi poi (es. dissogonia) devesi addirittura escludere che la maturazione delle gonadi provochi un arresto di sviluppo degli altri organi.

Formulo pertanto come segue la interpretazione che io do ai fenomeni di rudimentazione. Ad un certo momento, per effetto di stimoli esterni o interni, comparisce o ingrandisce un organo, provocando un arresto di sviluppo di altri; ciò accade probabilmente secondo regole, che la fisica, la chimica, o la chimica-fisica potranno un giorno analizzare con grande soddisfazione della nostra mente. Così si spiega la rudimentazione senza il disuso. Si può dare un'analoga spiegazione della comparsa, o del perfezionamento degli organi nuovi? La questione è molto più ardua e, se definita negativamente, potrebbe a sua volta perfino sollevare dei dubbî sulla giustezza della spiegazione da noi data alla rudimentazione. Ma qui mi si affaccia un terreno, sul quale il mio piede sdrucciola, e perciò io non voglio inoltrarmi.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota II del Corrispondente E. Almansi.

1. Ricordo la formula stabilita in una Nota precedente.

Suppongo che una massa liquida M, di densità ρ, in moto, occupi interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ di un corpo fisso S_0, ed un'altra superficie, pure fissa, σ'. Sulle particelle di M non agiscono forze di massa.

Chiamo p la pressione, al tempo t, in un punto qualunque di S; e considero la quantità

(1) $$A = \int_\sigma p\lambda d\sigma,$$

λ essendo una funzione definita nei punti di σ, che soddisfa alla condizione

(2) $$\int_\sigma \lambda d\sigma = 0 .$$

Dette u, v, w le componenti di velocità al tempo t, pongo:

$$U = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \tfrac{1}{2} V^2,$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

$$f = v\zeta - w\eta \quad , \quad g = w\xi - u\zeta \quad , \quad h = u\eta - v\xi ,$$

(2) $$D = f\frac{\partial \varphi}{\partial x} + g\frac{\partial \varphi}{\partial y} + h\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$Q = u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ove φ rappresenta una funzione armonica e regolare nello spazio S, che nei punti di σ e σ' verifica rispettivamente le equazioni

(3) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

n denotando la normale che penetra in S.

Potranno esservi in S, al tempo t, delle superficie su cui il moto è discontinuo. Chiamo ω l' insieme di tali superficie; n, in un punto qualunque di ω, la normale uscente da una faccia assunta come positiva; α, β, γ i suoi coseni direttori; N la componente $u\alpha + v\beta + w\gamma$ della velocità secondo n.

Suppongo che nei punti di ω i valori di U e Q siano presi sulla faccia positiva; chiamo invece U′, Q′ i valori delle quantità analoghe sulla faccia negativa. Pongo:

$$H = (Q - Q')\,N - (U - U')\frac{\partial \varphi}{\partial n} .$$

Si ha allora:

(4) $$A = \varrho\left(-\int_\sigma U\lambda\, d\sigma + \int_\omega H\, d\omega - \int_s D\, ds\right) .$$

In questa Nota dedurrò alcune conseguenze dalla formula (4), la quale ci fornisce il valore di A al tempo t, espresso mediante quantità che dipendono solo da u, v, w (non dalle loro derivate rispetto al tempo), e quantità indipendenti dal movimento della massa liquida.

2. Sieno, al tempo t, u_1, v_1, w_1 le componenti di velocità relative ad un movimento μ_1; e consideriamo un altro movimento μ a cui corrispondano le componenti di velocità

$$u = cu_1 \quad , \quad v = cv_1 \quad , \quad w = cw_1 ,$$

ove c rappresenta una costante (positiva o negativa). Esso sarà un movimento possibile, se tale è μ_1. Le superficie di discontinuità, se esistono, saranno le stesse nei due movimenti.

Le quantità ξ, η, ζ, Q, N, relative al movimento μ, si otterranno moltiplicando per c le quantità analoghe relative a μ_1; mentre le quantità U, f, g, h, D, H, relative a μ, si otterranno moltiplicando le analoghe, relative a μ_1, per c^2.

La quantità A relativa a μ (e ad una determinata funzione λ), sarà dunque eguale a $c^2 A_1$, essendo A_1 la quantità analoga relativa a μ_1. Onde avremo, se V e V_1 rappresentano le grandezze della velocità in uno stesso punto di S, nei due movimenti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{V^2}{V_1^2} .$$

Noi potremo chiamare *simili* tutti i movimenti μ che si ottengono facendo variare la costante c; ed avremo perciò il teorema:

I valori di A *relativi a movimenti simili, stanno fra loro come i quadrati delle velocità in uno stesso punto della massa in moto.*

In particolare il teorema varrà per le componenti della forza F e del momento G resultanti del sistema di forze $p\, d\sigma$, esercitate dalla massa liquida in moto sugli elementi di σ. Dunque la direzione *e il verso* di F (e tutto ciò che diciamo di F vale per G) sono gli stessi per movimenti simili; le grandezze stanno fra loro come i quadrati delle velocità in un medesimo punto.

Supponiamo $c = -1$, consideriamo cioè, al tempo t, insieme con μ_1, il movimento μ ottenuto invertendo le velocità delle singole particelle liquide. *Il vettore* F *sarà identico nei due movimenti.*

Introduciamo un vettore W atto a rappresentarci, in grandezza, direzione e verso, la *corrente* che investe il corpo S_0. Come componenti di W assumeremo, per un movimento generico $(u\, v\, w)$, i valori medii

$$W_x = \frac{\int_\sigma u\, d\sigma}{\sigma} , \text{ ecc.,}$$

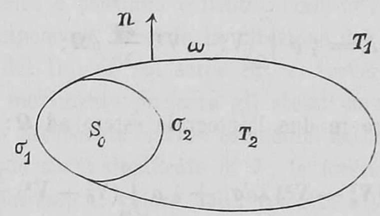
di u, v, w, sulla superficie σ di S_0.

Invertendo il movimento, il vettore W cambia di verso, mentre F rimane inalterato. Dunque: *o la spinta* F, *esercitata dalla massa liquida in moto sul corpo* S_0, *è nulla o normale alla direzione della corrente, in ambedue i movimenti; ovvero, in uno dei due, essa forma colla corrente* (supposta diversa da zero) *un angolo acuto.*

Noi possiamo considerare questo resultato (valido per movimenti continui e discontinui) come l'espressione più generale del *paradosso di D'Alembert*.

3. Esamineremo ora un caso particolare di movimento della massa liquida.

Si abbia, al tempo t, una superficie ω di discontinuità, che divida lo spazio S in due regioni T_1, T_2. La regione T_1 sia limitata dalla superficie chiusa σ' (che limita, con σ, l'intero spazio S), da ω, e da una parte σ_1 della superficie σ. Diciamo σ_2 la rimanente parte di σ. Nella regione T_1 il moto sia irrotazionale. Nella regione T_2 sia (al tempo t), $u = v = w = 0$. Cerchiamo in questo caso l'espressione di A.



Come faccia positiva di ω assumeremo quella che è rivolta verso T_1.

Mancando i vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$), sarà, in tutto lo spazio S, $D = 0$; quindi, per la formula (4):

$$A = \varrho \left(- \int_\sigma U \lambda \, d\sigma + \int_\omega H d\omega \right).$$

Poichè al tempo t le particelle di T_2 sono in quiete, sulla parte σ_2 di σ sarà $U = 0$; e sulla superficie ω, $N = 0$, $U' = 0$, e perciò

$$H = - U \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

ove U denota il semi-quadrato della velocità delle particelle liquide attigue ad ω, che appartengono a T_1. Avremo dunque:

$$A = \varrho \left(- \int_{\sigma_1} U \lambda \, d\sigma_1 - \int_\omega U \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega \right);$$

ovvero, chiamando Ω l'intera superficie chiusa formata da ω e σ_1, e ricordando che sopra σ_1 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ è uguale a λ:

$$A = - \varrho \int_\Omega U \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

od anche:

$$A = - \tfrac{1}{2} \varrho \int_\Omega V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

formula che si riduce alla (3) della Nota I quando Ω venga a coincidere con σ: quando, cioè, il moto sia continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S.

Poichè la funzione φ è armonica e regolare nello spazio S, e in particolare nella regione T_1 limitata dalle superficie σ' ed Ω, sulla prima delle quali si ha $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, sarà

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega = 0 ;$$

onde avremo pure, indicando con V_0 una costante arbitraria:

$$A = \tfrac{1}{2} \varrho \int_\Omega (V_0^2 - V^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega ; \tag{5}$$

e se torniamo a scindere in due l'integrale esteso ad Ω:

$$A = \tfrac{1}{2} \varrho \int_{\sigma_1} (V_0^2 - V^2) \lambda d\sigma_1 + \tfrac{1}{2} \varrho \int_\omega (V_0^2 - V^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega . \tag{6}$$

4. Noi possiamo immaginare una massa liquida in moto che occupi l'intero spazio esterno a σ. È questo un movimento puramente ideale, ma che ha importanza, in quanto, nei punti dello spazio abbastanza vicini ad S_0, esso potrà differire pochissimo dal movimento reale di una massa che occupi lo spazio limitato da una superficie σ' i cui punti siano tutti a distanza finita, ma lontanissimi da σ.

Assegneremo, al tempo t, in tutto lo spazio S, le componenti di velocità u, v, w, le quali potranno ammettere delle superficie di discontinuità ω. Supporremo che all'infinito u, v, w assumano valori costanti u_0, v_0, w_0, vale a dire che all'infinito il movimento sia traslatorio; e precisamente, che, posto

$$u = u_0 + u' \quad , \quad v = v_0 + v' \quad , \quad w = w_0 + w' ,$$

u', v', w' si comportino all'infinito, per ciò che riguarda il modo di tendere a zero delle funzioni stesse e delle loro derivate, come potenziali di masse distribuite in S_0.

Alla pressione p imporremo la condizione di assumere all'infinito un valore costante p_0.

Si può allora dimostrare che la p è determinata in tutto lo spazio S; quindi, fissata la funzione λ, potremo considerare la quantità A, definita dalla formula (1), e cercare di trasformarla come nella Nota I, introducendo la funzione φ, *armonica e regolare in tutto lo spazio* S, *che nei punti di* σ *verifica la condizione* $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda$, *e all'infinito si annulla* (o assume un valore costante).

Si troverà che susiste ancora la formula (4).

La funzione φ presenta i caratteri del potenziale di una massa *nulla* (per essere $\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma \lambda \, d\sigma = 0$) situata in S_0. Le sue derivate prime, che figurano nella espressione di A, decrescono rapidamente quando ci si allontana da S_0: all'infinito diventano infinitesime come l'inversa del cubo della distanza da un punto fisso. E ciò mostra che il movimento della massa liquida che occupa le regioni dello spazio lontane da S_0, ha poca influenza sul valore di A.

Se il movimento è continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S, ed A rappresenta la componente, secondo la direzione del moto all'infinito, della spinta esercitata dal liquido sul corpo S_0, si troverà, col Cisotti, $A = 0$.

Se invece il movimento presenta gli stessi caratteri di quello considerato nel paragrafo precedente (salvo l'estendersi della regione T_1 all'infinito), varranno, qualunque sia il significato di λ, le formule (5) e (6), in cui alla costante V_0 attribuiremo il valore della velocità all'infinito. Converrà però che in luogo di V scriviamo $V_0 \cdot V$. Avremo pertanto:

$$A = K \varrho V_0^2,$$

essendo

$$K = \tfrac{1}{2} \int_\Omega (1 - V^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\Omega,$$

ovvero

$$K = \tfrac{1}{2} \int_{\sigma_1} (1 - V^2) \lambda \, d\sigma_1 + \tfrac{1}{2} \int_\omega (1 - V^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\omega. \tag{7}$$

È superfluo ricordare che questo valore di A si riferisce al tempo t, in cui supponiamo che la massa occupante lo spazio T_2 sia in quiete: ciò che in generale non avverrà negl'istanti successivi.

5. Data la superficie σ che limita il corpo fisso S_0, e la direzione e il verso del moto traslatorio all'infinito, si può ritenere che esista una particolare superficie ω, che diremo ω', a cui corrisponde un movimento *stazionario* μ' della massa liquida. Essa si distacca da una linea tracciata sopra σ, che divide σ nelle due parti σ_1 e σ_2, e si estende all'infinito.

Diremo $V_0 \cdot V'$ la velocità nel movimento μ', V_0 essendo ancora la velocità di traslazione all'infinito. Sulla superficie ω', V' avrà un valore costante, ed eguale ad 1 [1].

Poniamo

$$K' = \tfrac{1}{2} \int_{\sigma_1} (1 - V'^2) \lambda \, d\sigma_1.$$

[1] V. Levi-Civita, *Sulla resistenza dei mezzi fluidi*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. X, 1901.

Consideriamo, al tempo t, un movimento μ, traslatorio all'infinito con velocità V_0, al quale corrisponda, come superficie di separazione fra le regioni T_1 e T_2, una superficie ω, i cui punti siano tutti a distanza finita da σ, ma che coincida in parte con ω', e se ne distacchi solo in punti lontanissimi da σ; ed ammettiamo che nella espressione (7) di K, il primo integrale differisca pochissimo da K', il secondo da zero: ciò che, in generale, avverrà effettivamente, per il modo di comportarsi delle derivate prime di φ allorchè ci si allontana da σ (§ 4), e per il fatto che, in prossimità di questa superficie, V differirà pochissimo da V', e, in particolare, nei punti di ω, da 1.

Lo stesso coefficiente K avrà allora un valore vicinissimo a K'. Inoltre, per un certo periodo di tempo, il movimento, in prossimità di σ, si conserverà sensibilmente stazionario; e K conserverà un valore poco diverso da K'.

6. Ritorniamo al caso che lo spazio S sia finito, e limitato dalle superficie σ e σ'.

Noi diamo al tempo t le componenti di velocità u, v, w, che devono verificare la condizione di incompressibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{8}$$

e nei punti di σ e σ' l'altra condizione

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0. \tag{9}$$

Date u, v, w, potremo calcolare le funzioni ξ, η, ζ, ed f, g, h (§ 1).

Supponiamo che u, v, w siano continue in tutto lo spazio S; e che inoltre resulti

$$f=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}, \quad g=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}, \quad h=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}, \tag{10}$$

ove P denoti una funzione regolare nello spazio S.

Ciò avverrà quando il movimento è stazionario; giacchè, essendo allora $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$, le equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}-f\right), \text{ ecc.} \qquad (\mathrm{I}, \ \S\ 3) \tag{11}$$

dànno:

$$f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho}+\mathrm{U}\right), \text{ ecc.;}$$

onde sarà:

$$P = \frac{p}{\varrho} + U + \text{cost.}$$

Inversamente, se al tempo t sono verificate le equazioni (10), il movimento è stazionario. Infatti, dato u, v, w al tempo t, il movimento è determinato in ogni istante, sono cioè determinate le funzioni u, v, w delle coordinate x, y, z e del tempo, e, a meno di una costante, la pressione p. Esse devono soddisfare alle equazioni (8), (9) e (11); le quali resultano effettivamente soddisfatte, supponendo che u, v, w conservino sempre, in tutti i punti dello spazio, il valore che hanno al tempo t, e che la pressione sia

$$p = \varrho(P - U) + \text{cost.}$$

Il valore di A, in questo caso, si può avere direttamente dalla formula (1) sostituendo a p la sua espressione. Sarà:

$$A = \varrho \int_\sigma (P - U)\, \lambda\, d\sigma. \tag{12}$$

Ma, come verifica, si può anche ricavare dalla (4). Non avendosi superficie di discontinuità, mancherà in essa il 2° integrale. Sarà poi, per le formule (2) e (10):

$$D = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

avremo quindi, con una integrazione per parti, tenendo presenti l'equazione $\Delta\varphi = 0$ e le (3):

$$\int_S D\, dS = -\int_\sigma P\lambda\, d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (4), otterremo ancora la (12).

In particolare, se mancano i vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$), sarà $f = g = h = 0$, $P = \text{cost}$; e si ritroverà la formula (3) della Nota I [1].

[1] La formula (12) sussiste anche nel caso limite che la massa liquida occupi l'intero spazio esterno a σ, e in particolare se all'infinito il moto è traslatorio. Sarebbe però da vedersi se esistano movimenti continui, traslatorii all'infinito, stazionarii, *e non irrotazionali*. Posta la condizione che tutte le linee di corrente provengano dall'infinito, per il principio della conservazione dei vortici, il vortice, che all'infinito è nullo, sarà nullo in tutti i punti di una linea di corrente, quindi in tutto lo spazio. Si ricade dunque nel moto irrotazionale.