ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Geologia. — *Il profilo geologico del Sempione. I. La Val Devero.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

Biologia — *Osservazioni intorno al fenomeno della rudimentazione.* Nota del Socio B. GRASSI.

Fisica matematica. — *Il moto di un elettrone nel campo magnetico.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

Matematica. — *Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Meccanica.— *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su gli zeri del limite di una successione di funzioni analitiche.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Sia

$$f_1(x)\,,\, f_2(x)\,,\, \dots\,,\, f_n(x)\,,\, \dots \tag{1}$$

una successione di funzioni analitiche, monodrome e regolari in tutti i punti *interni* [1] ad un campo C, la quale converga, nei punti detti, ad una funzione $F(x)$, anch'essa analitica, monodroma, regolare.

Ciò posto, ci domandiamo: che relazione esiste tra gli zeri delle funzioni (1) e quelli di $F(x)$?

2. Supponiamo, dapprima, che, nell'insieme dei punti interni a C, le funzioni (1) siano tutte, in modulo, ugualmente limitate; vale a dire, che esista un numero positivo M tale che, per tutti punti interni a C, sia

$$|f_n(x)| < M \qquad (n = 1\,,2\,,3\,,\dots). \tag{2}$$

[1] Un punto si dirà *interno* ad un campo C se potrà essere il centro di un cerchio tutto appartenente a C.

Quest' ipotesi è certamente soddisfatta se, nell' insieme dei punti interni a C, la (1) converge uniformemente alla $F(x)$, e questa è limitata. Può, però, mancare la convergenza uniforme ed essere soddisfatta la (2), anche nel caso di un campo C semplicissimo (circolare, per es.).

Osservato ciò, consideriamo un punto $\overline{x}$ *interno* a C. Esiste un numero positivo R tale che il cerchio $(\overline{x}, R)$ [1] sia costituito tutto di punti interni a C. In tutto questo cerchio, contorno compreso, è verificata la (2), e quindi, come è ben noto [2], in ogni cerchio $(\overline{x}, r)$ $(0 < r < R)$ — circonferenza compresa — la (1) converge in modo uniforme alla funzione $F(x)$.

Inoltre, poichè in $(\overline{x}, R)$ la $F(x)$, come funzione analitica regolare, non può avere che un numero finito di zeri, in e su $(\overline{x}, r)$, per r abbastanza piccolo, non esisteranno zeri di $F(x)$ distinti da $\overline{x}$; e potrà determinarsi un numero positivo m in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$|F(x)| > m$$

per ogni x della circonferenza C_r di $(\overline{x}, r)$. Da ciò, e dalla convergenza uniforme di (1) su C_r, si ha, preso un $\varepsilon < \frac{m}{2}$ e piccolo a piacere, per ogni n maggiore di un certo $\overline{n}$,

$$|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad |f_n(x)| > \frac{m}{2}$$

su tutto C_r. Segue, poi, dalla convergenza uniforme di (1) in ogni cerchio interno a $(\overline{x}, R)$, la convergenza uniforme di

$$f'_1(x) \, , \, f'_2(x) \, , \, \ldots \, , \, f'_n(x) \, , \, \ldots$$

alla $F'(x)$, e quindi la disuguaglianza

$$|F'(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$$

per ogni n maggiore di un certo $\overline{\overline{n}}$ e per ogni x di C_r. Dalle disuguaglianze precedenti si deduce, per ogni $n > \begin{cases} \overline{n} \\ \overline{\overline{n}} \end{cases}$ e per ogni x di C_r,

$$\left| \frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right| < \frac{|F'(x)\,F(x) - f'_n(x)\,F(x)| + \varepsilon |F'(x)|}{|F(x)\,f_n(x)|} < 2\varepsilon \left(\frac{1}{m} + \frac{M'}{m^2} \right),$$

dove M' indica un numero positivo maggiore del massimo modulo di $F'(x)$ su C_r. Poichè ε è piccolo a piacere, la disuguaglianza precedente porta la convergenza uniforme di $\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$ a $\frac{F'(x)}{F(x)}$ su tutto C_r, e quindi l'uguaglianza

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'_n(x)}{f_n(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx \, . \tag{3}$$

[1] Vale a dire, di centro $\overline{x}$ e raggio R.

[2] Osgood, *Note on the functions* ecc., Annals of Mathematics, second series, vol. III, n. 1.

Indichiamo, ora, con E l'insieme degli zeri delle funzioni (1), e supponiamo che $\overline{x}$ *non sia* un punto limite di E. Ponendo r soddisfacente alle condizioni dette ed all'altra che in e su $(\overline{x}, r)$ non esistano punti di E, avremo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}\,dx = 0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

e quindi, per la (3),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = 0\,.$$

Risulta dunque che $\overline{x}$, non essendo punto limite di E, non può essere uno zero di $F(x)$.

Sia, invece, $\overline{x}$ punto limite di E. Per infiniti valori di n è, allora,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}\,dx \geq 1\,,$$

e quindi, per la (3),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx \geq 1\,.$$

Se ne deduce che $\overline{x}$ è uno zero di $F(x)$. Ma si può dire di più. Poichè

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}\,dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx\,,$$

per ogni $n > \overline{n}$, sono numeri interi positivi, l'uguaglianza (3) porta l'altra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx$$

per ogni n maggiore di un certo N. Dunque, per ogni $n > N$, tutte le $f_n(x)$ hanno dentro C_r un numero di zeri uguale all'ordine dello zero $\overline{x}$ di $F(x)$; e, poichè r può farsi piccolo a piacere, possiamo dire che l'ordine dello zero $\overline{x}$ di $F(x)$ è dato dal numero delle radici di $f_n(x)$ che, al tendere di n all'infinito, tendono ad $\overline{x}$.

3. Si può notare che, in quanto si è detto al numero precedente, non si è sfruttata appieno l'ipotesi (2). Per le nostre conclusioni basta fare la ipotesi che per ciascun punto $\overline{x}$, interno a C, si possano determinare due numeri positivi $M_{\overline{x}}$, $R_{\overline{x}}$, tali che si abbia, per tutti gli x di $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$,

$$|f_n(x)| < M_{\overline{x}} \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{4}$$

Si può, poi, aggiungere che i risultati ottenuti continuano a sussistere anche se quest'ultima ipotesi non è verificata in punti interni a C *isolati*, ossia in un insieme J di punti interni a C, tale che nessuno dei suoi punti limiti sia interno a C medesimo. Detto, infatti, $\overline{\overline{x}}$ un punto di J, sia $(\overline{\overline{x}}, R)$ un cerchio tutto costituito di punti interni a C, e tale che non contenga, nè internamente, nè sul contorno, altri punti di J distinti da $\overline{x}$. Se, allora, r_1 è un numero positivo minore di R, nessuno dei punti della corona circolare $(\overline{\overline{x}}, r_1, R)$ appartiene ad J. In tutta questa corona, contorno compreso, è, perciò, verificata la (4); e, poichè trattasi di un insieme chiuso, per un noto teorema di Borel, con un numero finito di cerchi $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$ si ricopre tutta la corona. E, se si indica con M il massimo dei numeri $M_{\overline{x}}$ corrispondenti ai cerchi $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$ adoperati, si ha

$$|f_n(x)| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

in ogni punto della corona detta; se ne deduce che, internamente ad essa, la (1) e la $f'_1(x), f'_2(x), \ldots, f'_n(x), \ldots$, convergono in modo uniforme rispettivamente a $F(x)$ e $F'(x)$. Si può, quindi, stabilire la formola (3) con tutte le sue conseguenze.

Concludendo, possiamo enunciare la seguente proposizione:

Alle ipotesi del n. 1 si aggiunga l'altra che, ad eccezione al più di un insieme J di punti isolati, per ogni punto $\overline{x}$ interno a C si possano determinare due numeri positivi, $M_{\overline{x}}, R_{\overline{x}}$, tali che si abbia, per tutti gli x di $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$

$$|f_n(x)| < M_{\overline{x}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Allora, affinchè un punto X, interno a C, sia uno zero di $F(x)$, è necessario e sufficiente che X sia un punto limite dell'insieme degli zeri della funzione (1). Inoltre, l'ordine dello zero X di $F(x)$ è dato dal numero delle radici di $f_n(x)$, che, al tendere di n all'infinito, tendono ad X.

4. Se non facciamo nessuna ipotesi sul modo con cui le funzioni (1) convergono alla $F(x)$, che cosa possiamo rispondere alla domanda che ci siamo fatta al n. 1? La risposta, nel caso generale, sembra che non si possa dare. Possiamo, però, affermare qualcosa di concreto limitandoci a considerare classi speciali di funzioni $f_n(x)$. Supponiamo, dapprima che le $f_n(x)$ siano funzioni razionali intere a radici tutte reali: poniamo

$$f_n(x) = C_n(x - \alpha_{n1})(x - \alpha_{n2}) \ldots (x - \alpha_{nm_n}).$$

Vogliamo dimostrare che se $\overline{x}$ — interno a C — *non è* punto limite di E, non può essere uno zero di $F(x)$.

Supponiamo, in primo luogo, che sia $F(\overline{x}) = 0$ e $\overline{x} = \overline{u} + i\overline{v}$ con $\overline{v} \neq 0$. Per la convergenza della (1), preso un ε piccolo a piacere, potremo determinare un $\overline{n}$ tale che, per ogni $n > \overline{n}$ sia

$$|f_n(\overline{x})| < \varepsilon.$$

Ponendo $x = u + iv$, abbiamo

$$|f_n(x)| = |C_n| \sqrt{\{(u - \alpha_{n1})^2 + v^2\} \cdots \{(u - \alpha_{nm_n})^2 + v^2\}},$$

e quindi, per ogni $x' = \bar{u} + iv$, con $|v| < |\bar{v}|$

$$|f_n(x')| < |f_n(\bar{x})| < \varepsilon \qquad (n = \bar{n} + 1, \bar{n} + 2, \ldots). \tag{5}$$

Siccome $\bar{x}$ è interno a C, esisterà un segmento, avente per estremi $\bar{x}$ e $\bar{x}' = \bar{u} + i\bar{v}'$, con $|\bar{v}'| < |\bar{v}|$, tutto interno a C. Per ogni x' di tal segmento sarà verificata la (5) e si avrà, per la convergenza di (1),

$$|F(x')| < \varepsilon.$$

Poichè ε è piccolo a piacere, si avrà in tutto il segmento detto

$$F(x') = 0,$$

il che è assurdo.

Supponiamo, ora, che sia $F(\bar{x}) = 0$, con $\bar{x}$ reale. Preso ε piccolo a piacere, potremo anche qui determinare un $\bar{n}$ a partire dal quale sia

$$|f_n(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{6}$$

Siccome, poi, $\bar{x}$ non è punto limite di E, potremo determinare un intervallo (a, b) contenente nel suo *interno* il punto $\bar{x}$ e tale che in esso cadano punti di E, solo in numero finito. Prendendo, allora, un N abbastanza grande, potremo far sì che, per ogni $n > N$, $f_n(x)$ verifichi la (6) e non si annulli mai in (a, b), estremi compresi.

Il modulo di $f_n(x)$ $(n > N)$ avrà, perciò, in (a, b), al più un sol punto di massimo; e, quindi, in uno almeno dei due intervalli $(\bar{x}, a)$, $(\bar{x}, b)$, $|f_n(x)|$, $(n > N)$ sarà sempre decrescente. Segue che in uno almeno dei due intervalli detti $|f_n(x)|$ sarà, per infiniti valori di $n > N$, sempre decrescente, vale a dire, per la (6), sempre minore di ε. In tutto quest'intervallo sarà, allora, $|F(x)| < \varepsilon$ ed anche $F(x) = 0$: cosa assurda.

È dunque completamente dimostrato il nostro asserto.

Una facile generalizzazione del ragionamento precedente prova che

se le (1) *sono funzioni intere di genere zero, aventi tutte le radici disposte su una medesima retta, condizione necessaria affinchè un punto* $\bar{x}$, *interno a* C, *sia uno zero di* $F(x)$, *è che* $\bar{x}$ *sia punto limite dell'insieme degli zeri delle* $f_n(x)$.

La condizione trovata, oltre che necessaria, è anche sufficiente? Non pare.

5. Siano, ancora, le $f_n(x)$ funzioni razionali intere. Se tutti gli zeri delle $f_n(x)$ sono, rispetto ad una retta del piano complesso, tutti da una medesima parte (possono anche essere sulla retta stessa), allora il modulo di $f_n(x)$ va diminuendo quando da un punto del semipiano che non contiene zeri di $f_n(x)$ si va a cadere perpendicolarmente sulla retta considerata. Ripetendo un ragionamento fatto al n. 4 si può, perciò, concludere che nel semipiano a cui non appartengono gli zeri delle $f_n(x)$ non possono esistere

zeri di $F(x)$, interni a C. La conclusione rimane ancora esatta se ad uno stesso semipiano appartengono tutti gli zeri delle $f_n(x)$, ad eccezione di un numero finito di essi; ed anche se solamente i punti limiti di questi zeri appartengano ad uno stesso semipiano, purchè tra i punti limiti non sia ∞. Possiamo, perciò, dire che

se si può costruire un poligono convesso (od una curva chiusa convessa) tale che nel suo interno e sul suo contorno siano contenuti tutti i punti limiti degli zeri delle funzioni razionali intere $f_n(x)$, allora esternamente al poligono detto non possono esistere zeri di $F(x)$, interni a C. Ed anche *se tutti i punti limiti (fra i quali non è $x = \infty$) degli zeri delle $f_n(x)$ sono su una medesima retta, non possono, fuori della retta, esistere zeri di $F(x)$ interni a C.*

Questa proposizione resta vera anche se $x = \infty$ figura tra i punti limiti, purchè la distanza degli zeri delle $f_n(x)$ dalla retta considerata tenda a zero al crescere del modulo degli zeri stessi.

Meccanica. — *Sopra le correnti liquide spontanee.* Nota di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Il moto di un liquido, in assenza di forze di massa, avvenga per piani paralleli, col medesimo comportamento su ciascuno di essi in modo da corrispondersi i punti di una medesima retta perpendicolare.

Se si assume un piano qualunque del fascio per piano $z = 0$ di un sistema di riferimento, cartesiano ortogonale $(0; x, y, z)$, l'aspetto cinematico del fenomeno risulta indipendente dalla coordinata z.

Se si suppone poi che il fenomeno abbia carattere permanente, *tutto sarà indipendente oltre che da z anche dal tempo t.*

Assumiamo eguale ad 1, per maggior comodità, la densità (costante) del liquido, e chiamiamo p la pressione specifica. Se si indicano al solito con u e v le componenti della velocità, e si pone

$$(1) \qquad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} ,$$

dove $\Psi(x, y)$ designa un integrale della equazione

$$(2) \qquad \underset{2}{\Delta} \Psi = f(\Psi) ,$$

con f funzione arbitraria di Ψ, è noto che le (1) rendono soddisfatte tutte le equazioni indefinite [1].

[1] Cfr. ad es. Lamb., *Lehrbuch der Hydrodynamik* (trad. tedesca), Leipzig und Berlin, Teubner, 1907, pag. 285.