ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Fisica matematica. — *Il moto di un elettrone nel campo magnetico.* Nota del Corrispondente Antonio Garbasso.

1. Un elettrone si muove sotto l'azione di forze centrali; le coordinate x ed y della sua trajettoria (piana) soddisfano dunque alle

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\,\mathrm{F}(r)\cdot \dfrac{x}{r}\,, \\ m\ddot{y} = -\,\mathrm{F}(r)\cdot \dfrac{y}{r}\,, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Si ecciti adesso un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla giacitura dell'orbita, e si domandi sotto quali condizioni l'effetto del campo consisterà in una rotazione uniforme, intorno alla linea di forza che passa per il centro attraente

Analiticamente il problema vuol essere posto nel modo che segue.

Si scrivono le equazioni del fenomeno perturbato sotto la forma

$$(1) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = -\,\mathrm{F}(r)\cdot \dfrac{x}{r} + \mathrm{AH}e\dot{y}\,, \\ m\ddot{y} = -\,\mathrm{F}(r)\cdot \dfrac{y}{r} - \mathrm{AH}e\dot{x}\,, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

e si assumono le condizioni

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t\,, \\ y = \eta \cos \omega t - \xi \sin \omega t\,, \end{cases} \qquad [\text{con } \omega \text{ costante}]\,,$$

intendendo che le ξ ed η soddisfino alle

$$(3) \qquad \begin{cases} m\ddot{\xi} = -\,\mathrm{F}(\varrho)\cdot \dfrac{\xi}{\varrho}\,, \\ m\ddot{\eta} = -\,\mathrm{F}(\varrho)\cdot \dfrac{\eta}{\varrho}\,, \end{cases} \qquad \varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,.$$

Sostituisco le (2) nelle (1), e tengo conto delle (3), mi viene

$$\begin{cases} [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\eta}] \cos \omega t \\ \qquad = -\,[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\xi}] \sin \omega t\,, \\ [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\xi}] \cos \omega t \\ \qquad = +\,[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\eta}] \sin \omega t\,, \end{cases}$$

e dunque

$$[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot\eta]^2 + [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot\xi]^2 = 0\,,$$

o ancora

$$[(2q-\omega)\,\omega\xi - 2(q-\omega)\,\dot\eta]^2 + [(2q-\omega)\,\omega\eta + 2(q-\omega)\,\dot\xi]^2 = 0\,, \tag{4}$$

con

$$q = \frac{\mathrm{AH}e}{2m}\,. \tag{5}$$

Dalla (4) risulta immediatamente

$$\left\{\begin{aligned} &(2q-\omega)\,\omega\xi - 2(q-\omega)\,\mathrm{D}\eta = 0\,,\\ &2(q-\omega)\,\mathrm{D}\xi + (2q-\omega)\,\omega\eta = 0\,,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

e però le ξ ed η devono soddisfare alle

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (2q-\omega)\,\omega & -2(q-\omega)\,\mathrm{D}\\ 2(q-\omega)\,\mathrm{D} & (2q-\omega)\,\omega \end{vmatrix}\,\xi = 0\,,\\ &\begin{vmatrix} (2q-\omega)\,\omega & -2(q-\omega)\,\mathrm{D}\\ 2(q-\omega)\,\mathrm{D} & (2q-\omega)\,\omega \end{vmatrix}\,\eta = 0\,,\end{aligned}\right.$$

cioè alle

$$\left\{\begin{aligned} \ddot\xi &= -\frac{(2q-\omega)^2\cdot\omega^2}{4(q-\omega)^2}\cdot\xi\,,\\ \ddot\eta &= -\frac{(2q-\omega)^2\cdot\omega^2}{4(q-\omega)^2}\cdot\eta\,.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Perchè le (7) si identifichino con le (3) bisogna dunque fare

$$\frac{\mathrm{F}(\varrho)}{\varrho} = p^2 = \text{costante.} \tag{8}$$

A parole « vi è un modo solo per soddisfare rigorosamente alla richiesta; « la forza deve essere proporzionale alla distanza o il movimento armonico ».

Si ricade così nelle condizioni ben note, che dànno origine al fenomeno di Zeeman.

2. Ponendo, secondo le (7) e (8)

$$\frac{(2q-\omega)\,\omega}{2(q-\omega)} = \pm p\,,$$

risulta

$$\omega = \begin{cases} \begin{cases} q + p - \sqrt{p^2 + q^2}\,, & (\alpha) \\ q + p + \sqrt{p^2 + q^2}\,, & (\alpha') \end{cases} \\ \begin{cases} q - p + \sqrt{p^2 + q^2}\,, & (\beta) \\ q - p - \sqrt{p^2 + q^2}\,. & (\beta') \end{cases} \end{cases}$$

In realtà, se si scrive

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \xi = a \cos pt\,, \\ \eta = a \sin pt\,, \end{cases}$$

le (6) riescono soddisfatte con le posizioni (α) e (α'); se si postula invece che sia

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \xi = a \cos pt\,, \\ \eta = -a \sin pt\,, \end{cases}$$

bisogna ricorrere ai valori (β) e (β').

Dalle (A) e (α) deriva

$$[\mathrm{A}\,,\alpha]\cdots\cdots \begin{cases} x = a \cos pt \cos \omega t + a \sin pt \sin \omega t\,, \\ \quad = a \cos(p - \omega)\, t\,, \\ \quad = a \cos(\sqrt{p^2 + q^2} - q)\, t\,, \\ y = a \sin pt \cos \omega t - a \cos pt \sin \omega t\,, \\ \quad = a \sin(p - \omega)\, t\,, \\ \quad = a \sin(\sqrt{p^2 + q^2} - q)\, t\,; \end{cases}$$

mentre dalle (B) e (β) risulta

$$[\mathrm{B}\,,\beta]\cdots\cdots \begin{cases} x = a \cos pt \cos \omega t - a \sin pt \sin \omega t\,, \\ \quad = a \cos(p + \omega)\, t\,, \\ \quad = a \cos(\sqrt{p^2 + q^2} + q)\, t\,, \\ y = -a \sin pt \cos \omega t - a \cos pt \sin \omega t\,, \\ \quad = -a \sin(p + \omega)\, t\,, \\ \quad = -a \sin(\sqrt{p^2 + q^2} + q)\, t\,. \end{cases}$$

Quanto alle combinazioni $[\mathrm{A}\,,\alpha']$ e $[\mathrm{B}\,,\beta']$ esse non ci apprendono niente di nuovo.

Perchè dalla prima nasce

$$[\mathrm{A}\,,\alpha'] \equiv [\mathrm{B}\,,\beta] \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} x &= \quad a\cos(p-\omega)\,t\,,\\ &= \quad a\cos(-\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,,\\ &= \quad a\cos(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,,\\ y &= \quad a\sin(p-\omega)\,t\,,\\ &= \quad a\sin(-\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,,\\ &= -a\sin(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,; \end{aligned}\right.$$

e dalla seconda

$$[\mathrm{B}\,,\beta'] \equiv [\mathrm{A}\,,\alpha] \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} x &= \quad a\cos(p+\omega)\,t\,,\\ &= \quad a\cos(-\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,,\\ &= \quad a\cos(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,,\\ y &= -a\sin(p+\omega)\,t\,,\\ &= -a\sin(-\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,,\\ &= \quad a\sin(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,. \end{aligned}\right.$$

Ho dato nel luglic scorso un metodo il quale permette di descrivere meccanicamente le orbite, che corrispondono, per il caso testè trattato agli integrali generali ([1]).

3. Si noterà adesso che quando la q^2 fosse piccola in confronto della p^2, le (α) e (β) fornirebbero concordemente

$$\omega = q\,.$$

Questo risultato è più generale che non possa parere a prima vista. In realtà se si suppone debolissima, come è nei casi pratici, la perturbazione dovuta al campo magnetico, i primi membri delle (6) si riducono ai termini, che contengono le velocità; e risulta dunque

$$(6')\qquad \left\{ \begin{aligned} (q-\omega)\,\dot{\xi} &= 0\,,\\ (q-\omega)\,\dot{\eta} &= 0\,, \end{aligned}\right.$$

alle quali equazioni si soddisfa ponendo ancora una volta

$$\omega = q\,.$$

E però « l'orbita di un elettrone, soggetto a forze centrali, gira senza deformarsi nel suo piano, intorno al punto attraente, quando si ecciti un

([1]) Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [1], 583, 1909.

« campo debole normale al detto piano, e gira, per la (5), con la velocità « angolare

$$\omega = \frac{AHe}{2m} \text{ »}.$$

La cosa fu riconosciuta già, recentemente, dal Righi, per il caso dei sistemi che dànno origine ai cosidetti raggi magnetici [1].

Paleontologia. — *Alcuni mammiferi fossili del Genovesato e del Savonese.* Memoria del Corrisp. A. Issel.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie.* Nota del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Recentemente [2] il prof. G. Lauricella, completando un resultato del prof. E. Picard [3], dimostrava che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{U}(x\,,y)\, dx = g(y) \tag{1}$$

ammetta una soluzione $f(x)$ atta all'integrazione insieme al suo quadrato $f^2(x)$ nell'intervallo $a\,b$ sono:

1°) che una certa serie Σa_n^2 sia convergente;

2°) che la $g(y)$ sia esprimibile per mezzo di una serie di Fourier-Hilbert procedente per certe funzioni date $\varphi_1(y)\,,\varphi_2(y)\,,\dots,\varphi_n(y)\,,\dots$

Il problema della risolubilità della equazione (1) viene così ricondotto a determinare quando una funzione $g(y)$ è sviluppabile in una serie di Fourier-Hilbert di funzioni date $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\dots$, problema difficile, di cui non è ancora stata data una soluzione esauriente.

Ad un risultato analogo noi eravamo giunti [4] nel caso particolare in cui l'integrale del primo membro è esteso ad un contorno chiuso e le funzioni che si considerano sono funzioni uniformi dei punti di quel contorno.

[1] Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [2], 241 e 301, 1909.
[2] Comptes Rendus, 14 giugno 1909.
[3] Atti della R. Accademia dei Lincei, 1 agosto 1909.
[4] Annali di Matematica, marzo 1909.