ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Meccanica. — *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figura di equilibrio.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Nell' ipotesi di un fluido omogeneo, occupante uno spazio finito semplicemente connesso, non si sapeva, fino ad ora, se potesse assegnarsi un limite superiore delle suddette velocità angolari inferiore al noto limite $\sqrt{2\pi k\varrho}$ (Poincaré) [1], i simboli avendo il significato che tosto diremo.

Nella presente Nota stabilisco appunto *un limite superiore, di quelle velocità angolari*, inferiore a $\sqrt{2\pi k\varrho}$, e, precisamente, *eguale a* $\sqrt{\pi k\varrho}$.

Intenderemo che lo spazio S occupato dal fluido sia finito e semplicemente connesso e che il contorno σ dello spazio stesso sia convesso.

Ciò posto, siano

ϱ la densità del fluido (e sia $\varrho =$ costante);
k la costante della gravitazione universale;
ω la velocità angolare del supposto moto rotatorio uniforme.

Indichiamo, poi, con x, y, z le coordinate cartesiane di un punto generico del fluido rispetto alla nota terna d'assi legata al fluido stesso. L'asse z sia l'asse di rotazione.

Indichiamo, inoltre, con V la funzione potenziale

$$k\varrho \int_S \frac{dS}{r} .$$

Le variabili d' integrazione verranno indicate con x_1, y_1, z_1. Inoltre

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} .$$

Poichè supponiamo che la superficie contorno del fluido sia figura di equilibrio, avremo su quella superficie

$$\mathrm{U} = \mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{costante} = \mathrm{C} \tag{I}$$

e

$$\frac{d\mathrm{U}}{dn} > 0 , \tag{II}$$

assumendo come definizione di figura di equilibrio, del supposto fluido, ogni

[1] Bulletin astronomique, 1885, pag. 118, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, pag. 11.

superficie, contorno del fluido stesso, sulla quale sussistano contemporaneamente le (I) e (II).

Nello spazio S, racchiuso dalla figura di equilibrio, rimane definita la funzione U, la quale assume al contorno un valore costante ed ha il $\Delta^2 U =$ costante nei punti interni dell'agente. Per cui, ricordando la nota formula di Green

$$4\pi U = \int_\sigma \left(U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} \right) d\sigma - \int_S \frac{\Delta^2 U}{r} dS ,$$

ottengo, nei punti interni del fluido, identicamente

$$4\pi U = C \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} d\sigma - (2\omega^2 - 4\pi k\varrho) \int_S \frac{dS}{r} .$$

Ma, nei detti punti interni,

$$\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 4\pi ,$$

talchè

$$\text{(III)} \qquad 4\pi U = 4\pi C - \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} d\sigma - \frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho} V .$$

Ora, indico con n_σ la normale precedentemente indicata con n, per distinguerla dalla normale n_s, sulla quale n_s supporremo di collocare il punto interno (x, y, z), intendendo le normali n_σ ed n_s al contorno volte verso l'interno.

Ciò posto, dalla (III), ottengo

$$4\pi \frac{dU}{dn_s} = - \frac{d}{dn_s}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn_\sigma} d\sigma - \frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho}\frac{dV}{dn_s} .$$

E, tendendo col punto interno in questione, situato sulla normale n_s, verso il punto (s) in cui la normale stessa incontra il contorno, avrò al limite

$$4\pi \left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s = - \lim \frac{d}{dn_s}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn_\sigma} d\sigma - \frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho}\left(\frac{dV}{dn_s}\right)_s .$$

Ma, come è noto dalla teoria del potenziale,

$$\lim \frac{d}{dn_s}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn_\sigma} d\sigma = -2\pi \left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s + \int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2} d\sigma ,$$

essendo φ l'angolo che la normale n_s forma con la retta congiungente i punti (s) e (σ) del contorno, volta nel noto senso, ed essendo r_0 la grandezza della distanza (s) (σ).

Avrò, quindi,

$$2\pi\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s + \int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma = -\frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho}\left(\frac{dV}{dn_s}\right)_s .$$

Ma

$$\frac{dV}{dn_s} = \frac{dU}{dn_s} - \frac{\omega^2}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{dn_s},$$

dunque

$$2(\omega^2 - \pi k\varrho)\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s + k\varrho\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma =$$

$$= \omega^2(\omega^2 - 2\pi k\varrho)\left[\frac{d(x^2+y^2)}{dn_s}\right]_s .$$

Ora, supponiamo che (s) sia un punto in cui il piano tangente al contorno è normale all'asse di rotazione. Nel punto in discorso sarà

$$\left[\frac{d(x^2+y^2)}{dn_s}\right]_s = 0,$$

e, perciò, sarà

$$2(\omega^2 - \pi k\varrho)\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s + k\varrho\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma = 0$$

in quel punto medesimo. Ma, il contorno σ essendo, per ipotesi, convesso, $\cos\varphi > 0$. Inoltre, per ipotesi, $\frac{dU}{dn} > 0$; dunque

$$k\varrho\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma > 0 .$$

Sarà, quindi, corrispondentemente,

$$(\omega^2 - \pi k\varrho)\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s < 0,$$

da cui

$$\omega^2 - \pi k\varrho < 0$$

ovvero

$$\omega^2 < \pi k\varrho .$$

Dunque

(IV) $$\omega < \sqrt{\pi k\varrho}$$

come volevo dimostrare.

È chiaro, però, che, quì, all'espressione «limite superiore», che ho voluto usare, non è detto che possa attribuirsi lo stesso significato che in analisi, giacchè la (IV) ci dice soltanto che ω è inferiore a $\sqrt{\pi k\varrho}$.