ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Di alcune nuove classi di equazioni integrali.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

I teoremi di Hilbert-Schmidt per le equazioni integrali a nucleo simmetrico furono da me estesi in una recente Memoria [1] alle equazioni integrali polari senza far uso dell'algoritmo delle forme quadratiche a infinite variabili. Gli stessi metodi da me usati in tale ricerca permettono di estendere tali risultati ad alcune nuove classi di equazioni integrali, che io studierò successivamente nei §§ 1, 2, 3 di questa Nota. Delle dimostrazioni non dò quasi cenno, perchè sono perfettamente analoghe a quelle della Memoria citata. I simboli di integrazione si dovranno tutti intendere come simboli d'integrazione in un dato intervallo finito J. Le funzioni di una sola variabile, che noi introdurremo, saranno tacitamente supposte integrabili insieme al loro quadrato nell'intervallo J. Le funzioni simmetriche di due variabili, che noi useremo, saranno supposte soddisfare alle condizioni, che Hilbert-Schmidt impongono ai nuclei (Kern) delle equazioni integrali da essi studiate.

1. Sia l'equazione

$$f(x) = \varphi(x) + \int \mathrm{K}(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy - \lambda \int \mathrm{G}(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy =$$
$$= \varphi(x) + \int [\mathrm{K}(x\,,y) - \lambda\,\mathrm{G}(x\,,y)]\,\varphi(y)\,dy$$

un'equazione integrale, dove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, K e G sono funzioni simmetriche delle $x\,,y$. Questa è la più generale equazione integrale simmetrica, che contenga linearmente il parametro λ; e per $\mathrm{K}=0$ si riduce alla equazione di Hilbert-Schmidt. Supporremo che $\mathrm{K}(x\,,y)$ sia un nucleo *definito positivo*, che cioè per ogni funzione $u(x)$ si abbia

$$\iint \mathrm{K}(x\,,y)\,u(x)\,u(y)\,dx\,dy \geq 0\,.$$

Se $u(x)\,,v(x)$ sono funzioni in J, porremo

$$\mathrm{L}_1(u\,,v) = \int u(x)\,v(x)\,dx + \iint \mathrm{K}(x\,,y)\,u(x)\,v(y)\,dx\,dy\ ;\quad \mathrm{L}_1(u\,,u) = \mathrm{L}_1(u)$$

$$\mathrm{L}_2(u\,,v) = \iint \mathrm{G}(x\,,y)\,u(x)\,v(y)\,dx\,dy\ ;\quad \mathrm{L}_2(u\,,u) = \mathrm{L}_2(u).$$

[1] *Equazioni integrali e valori eccezionali*, Annali di Matematica, 1910, serie 3ª, tomo 17.

I limiti superiore e inferiore di $L_2(u)$, quando u soddisfaccia alla $L_1(u) = 1$, sono entrambi limitati: sia $\mu \neq 0$ uno di essi; e sia $u_1, u_2, u_3 \ldots$ una successione di funzioni tali che $L_1(u_n) = 1$, $\lim_{n=\infty} L_2(u_n) = \mu$. Si può dimostrare che la nostra successione si può scegliere in guisa che esista il

$$\lim_{n=\infty} \int [G(x, y) - \mu K(x, y)]\, u_n(y)\, dy,$$

e che questo limite sia una funzione $\psi(x)$ continua della x. E questa funzione $\varphi(x)$ differisce soltanto per un fattore costante da una funzione $\varphi(x)$ soddisfacente alle

$$L_1(\varphi) = 1$$

$$\text{(1)} \qquad \mu \left\{ \varphi(x) + \int K(x, y)\, \varphi(y)\, dy \right\} = \int G(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Una funzione φ, e il corrispondente valore del parametro μ tali che sia soddisfatta la (1) si diranno *una funzione* e *un valore eccezionale* per la nostra equazione integrale. Resta così provata *l'esistenza di almeno una soluzione eccezionale.*

Se chiamiamo *coniugato normale* un sistema di funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soddisfacenti alle $L_1(\varphi_i) = 1$, $L_1(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ (per $i \neq k$), si può dimostrare facilmente che ogni sistema di funzioni (linearmente indipendenti) eccezionali per la nostra equazione integrale si può con una trasformazione lineare intera omogenea trasformare in un *sistema coniugato normale.* Supposto dunque che $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sia un sistema coniugato normale di funzioni eccezionali, e che $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ siano i corrispondenti *valori eccezionali*, la ricerca di una $(n+1)^{esima}$ funzione eccezionale, e del corrispondente *valore eccezionale* equivale a un problema analogo a quello già studiato, a studiare cioè i limiti inferiore e superiore dell'integrale

$$L_2\left(f - \sum_1^n c_i\, \varphi_i\right) = \iint G^{(n)}(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

quando la funzione f soddisfi alla

$$1 = L_1\left(f - \sum_1^n c_i\, \varphi_i\right) = \int f^2(x)\, dx + \iint K^{(n)}(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy.$$

Si è posto in queste formole

$$c_i = \mathrm{L}_1(f\,,\varphi_i) = \frac{1}{\mu_i}\,\mathrm{L}_2(f\,,\varphi_i)\,;$$

$$\mathrm{G}^{(n)}(x\,,y) = \mathrm{G}(x\,,y) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\{ \varphi_i(x) + \int \mathrm{K}(x\,,\varrho)\,\varphi_i(\varrho)\,d\varrho \right\} \times \\ \times \left\{ \varphi_i(y) + \int \mathrm{K}(y\,,\varrho)\,\varphi_i(\varrho)\,d\varrho \right\}$$

$$\mathrm{K}^{(n)}(x\,,y) = \mathrm{K}(x\,,y) - \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi_i(x) + \int \mathrm{K}(x\,,\varrho)\,\varphi_i(\varrho)\,d\varrho \right] \times \\ \times \left[\varphi_i(y) + \int \mathrm{K}(y\,,\varrho)\,\varphi_i(\varrho)\,d\varrho \right].$$

Resta così (come nella Memoria citata), dato un mezzo per determinare una dopo l'altra tutte le funzioni eccezionali e i corrispondenti valori eccezionali.

E assai probabile che ulteriori ricerche permettano

1°) di dare una teoria per gli sviluppi in serie secondo le funzioni eccezionali qui determinate;

2°) di imporre a $\mathrm{K}(s\,,t)$ condizioni meno restrittive;

3°) di estendere questi risultati a qualche classe di equazioni integrali, il cui nucleo, pur essendo simmetrico nelle $x\,,y$, contiene il parametro λ non linearmente (Quest' ultima previsione è giustificata dalle recenti generalizzazioni dovute al Bôcher dei teoremi di oscillazione).

2. Ai precedenti risultati si può dare un'altra forma interessante. La equazione

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int \mathrm{K}(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy$$

è costantemente equivalente a un'equazione del tipo

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int \mathrm{H}(x\,,y)\,\psi(y)\,dy$$

dove H è una funzione soddisfacente alla

$$\mathrm{H}(x\,,y) + \mathrm{K}(x\,,y) + \int \mathrm{H}(x\,,z)\,\mathrm{K}(y\,,z)\,dz = 0\,.$$

Se infatti così non fosse, esisterebbe una funzione $u(x) \neq 0$ soddisfacente alla

$$u(x) + \int \mathrm{K}(x\,,y)\,u(y)\,dy = 0$$

e quindi alla

$$\int u^2(x)\,dx + \iint \mathrm{K}(x\,,y)\,u(x)\,u(y)\,dx\,dy = 0\,,$$

cosicchè $K(x, y)$ non sarebbe un nucleo definito positivo. La (1) si potrà quindi scrivere [1]:

$$\mu\psi(x) = \int \left[G(x, y) + \int G(x, z)\, H(y, z)\, dz \right] \psi(y)\, dy.$$

I risultati del § 1 estendono così la teoria delle soluzioni eccezionali alle equazioni integrali, il cui nucleo (generalmente non simmetrico)

$$G(x, y) + \int G(x, z)\, H(y, z)\, dz$$

è la somma della funzione simmetrica $G(x, y)$ e del prodotto *simbolico* $\int G(x, z)\, H(y, z)\, dz$ delle funzioni simmetriche G, H.

[1] Un analogo artificio può essere utile anche in altri problemi. Sia l'equazione

$$\text{(1)} \quad \varphi(x, y) + \int A(x, y, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi + \int B(x, y, \eta)\, \varphi(x, \eta)\, d\eta + \iint C(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

dove A, B, C, f sono fnnzioni date dei loro argomenti, $\varphi(x, y)$ la funzione incognita. Suppongo che le equazioni

$$\text{(2)} \quad \begin{gathered} \varphi(x, y) + \int A(x, y, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y), \\ \psi(x, y) + \int B(x, y, \eta)\, \psi(x, \eta)\, d\eta = \chi(x, y), \end{gathered}$$

dove φ e ψ sono rispettivamente le funzioni considerate come incognite, siano la prima, per ogni valore di y (che ha l'ufficio di parametro) nell'intervallo considerato, la seconda, per ogni valore della x], equazioni *generali* del Fredholm. Suppongo cioè cbe le (2) siano equivalenti a formole del tipo

$$\text{(3)} \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \psi(x, y) + \int a(x, y, \xi)\, \psi(\xi, y)\, d\xi \\ \psi(x, y) &= \chi(x, y) + \int b(x, y, \eta)\, \chi(x, \eta)\, d\eta, \end{aligned} \right.$$

dove $a(x, y, \xi)$ e $b(x, y, \eta)$ sono funzioni finite negli intervalli considerati. Tenendo conto delle prime delle equazioni (2), (3). la (1) si trasforma in un'equazione del tipo

$$\psi(x, y) + \int B(x, y, \eta)\, \psi(x, \eta)\, d\eta + \iint \Gamma(x, y, \xi, \eta)\, \psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

dove Γ è una funzione nota. Questa equazione in virtù delle 2e delle equazioni (2), (3) si può scrivere:

$$\text{(4)} \quad \chi(x, y) + \iint \Lambda(x, y, \xi, \eta)\, \chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

dove Λ è una funzione nota. L'equazione integrale (1) di tipo nuovo equivale dunque al sistema delle tre equazioni (2), (4): tutte del Fredholm; e il suo studio viene così senza altro esaurito.

3. Dimostrerò ora che la teoria delle funzioni e dei valori eccezionali si può estendere a quelle equazioni del Fredholm, il cui nucleo è il prodotto *simbolico* $\int K(x, z)\, V(y, z)\, dz$ di due funzioni simmetriche $K(x, y)$, $V(x, y)$. Su $K(x, y)$ farò le ipotesi già enunciate al § 1. Poniamo

$$L_1(u, v) = \iint K(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy \quad ; \quad L_1(u) = L_1(u, u)$$

$$H_2(x, y) = \iint K(x, r)\, V(r, s)\, K(s, y)\, dr\, ds$$

$$L_2(u, v) = \iint H_2(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy\, ; \quad L_2(u) = L_2(u, u)$$

$$\Gamma(u, v) = \iint V(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy \quad ; \quad \Gamma(u) = \Gamma(u, u).$$

I limiti inferiore e superiore dei valori di $L_2(u)$, quando la funzione u soddisfa alla $L_1(u) = 1$ sono finiti. Sia $\mu \neq 0$ uno di essi; e siano le $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ funzioni soddisfacenti alle $L_1(u_n) = 1$, $\lim_{n=\infty} L_2(u_n) = \mu$. Si può dimostrare che la successione delle u_n si può scegliere in guisa che $\int H_2(x, r)\, u_n(r)\, dr$ tenda per $n = \infty$ a un limite $\psi(x)$, che differisce soltanto per un fattore costante da una funzione $\varphi(x)$ soddisfacente alle

$$\Gamma(\varphi) = \varepsilon = \frac{|\mu|}{\mu} = \pm 1$$

$$\mu\, \varphi(x) = \int \left[\int K(x, r)\, V(y, r)\, dr \right] \varphi(y)\, dy. \tag{2}$$

Se diciamo *funzione eccezionale* e *valore eccezionale* una funzione $\varphi(x)$ e il valore corrispondente di μ, che soddisfacciano alla (2), le precedenti considerazioni servono a dimostrare nel caso attuale l'esistenza di *almeno una funzione e un valore eccezionali.*

Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ è un sistema di funzioni eccezionali (linearmente indipendenti) e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ è il sistema dei corrispondenti valori eccezionali del parametro μ, si dimostra, posta $\varepsilon_i = \frac{\mu_i}{|\mu_i|} = \pm 1$ che con una opportuna trasformazione lineare il sistema delle φ_i si può trasformare in un altro sistema di funzioni eccezionali φ_i soddisfacenti alle $\Gamma(\varphi_i) = \varepsilon_i$, $\Gamma(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ (per $i \neq k$), ossia, come diremo, in un sistema *coniugato* normale. Per trovare poi una $(n+1)^{esima}$ funzione eccezionale φ_{n+1} e il corrispondente valore eccezionale μ_{n+1}, si ponga:

$$p_i(x) = \int \mathrm{V}(x\,,y)\,\varphi_i(y)\,dy \qquad c_i = \varepsilon_i \int f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

$$\mathrm{K}^{(n)}(x\,,y) = \mathrm{K}(x\,,y) - \sum_1^n |\mu_i|\,\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)$$

$$\mathrm{L}_1^{(n)}(f) = \mathrm{L}_1\left(f - \sum_1^n c_i\,p_i\right) = \mathrm{L}_1(f) - \sum_1^n |\mu_i|\,c_i^2 =$$

$$= \iint \mathrm{K}^{(n)}(x\,,y)\,f(x)\,f(y)\,dx\,dy$$

$$\mathrm{H}_2^{(n)}(x\,,y) = \mathrm{H}_2(x\,,y) - \sum_1^n \mu_i\,|\mu_i|\,\varphi_i(x)\,\varphi_i(y) =$$

$$= \iint \mathrm{K}^{(n)}(x\,,r)\,\mathrm{V}(r\,,s)\,\mathrm{K}^{(n)}(s\,,y)\,dr\,ds$$

$$\mathrm{L}_2^{(n)}(f) = \mathrm{L}_2\left(f - \sum_1^n c_i\,p_i\right) = \mathrm{L}_2(f) - \sum \mu_i\,|\mu_i|\,c_i^2 =$$

$$= \iint \mathrm{H}_2^{(n)}(x\,,y)\,f(x)\,f(y)\,dx\,dy\,.$$

Lo studio dei limiti inferiore e superiore dei valori di $\mathrm{L}_2^{(n)}(f)$, quando f soddisfa alla $\mathrm{L}_1^{(n)}(f) = 1$ è un problema simile a quello già trattato [1];

[1] Poichè in questa dimostrazione si presenta qualche fatto nuovo, lo riassumerò brevemente, rinviando per i particolari alla dimostrazione analoga della Mem. citata.

Sia $\mu_{n+1} \neq 0$ uno dei limiti (inferiore o superiore) testè ricordati nel testo; sia $u_1\,,u_2\,,\ldots$ una successione tale che $\mathrm{L}_1^{(n)}(u_j) = 1\,,\ \mathrm{L}_2^{(n)}(u_j) = \mu_{n+1} + \eta_j$, dove $\lim\limits_{j=\infty} \eta_j = 0$.

Si dimostra che la successione delle u_j si può scegliere in modo che $\int \mathrm{H}_2^{(n)}(x\,,y)\,u_j(y)\,dy$ tenda per $j = \infty$ a una funzione limite continua $\psi(x)$ e si dimostra pure che, se $v_1\,,v_2\,,\ldots$ è un'altra successione di funzioni, tale che $\mathrm{L}_1(v_j)$ siano per $j = 1\,,2\,\ldots$ tutte inferiori ad una stessa costante, allora

$$(\alpha) \qquad \lim_{j=\infty} \int v_j(x)\,dx \left\{ (\mu_{n+1} + \eta_j) \int \mathrm{K}^{(n)}(x\,,y)\,u_j(y)\,dy - \int \mathrm{H}_2^{(n)}(x\,,y)\,u_j(y)\,dy \right\} = 0\,.$$

Ponendovi successivamente

$$v_j(x) = \int \mathrm{K}^{(n)}(z\,,r)\,\mathrm{V}(r\,,x)\,dr \quad,\quad v_j(x) = u_j(x) \quad,\quad v_j(x) = \int \psi(r)\,\mathrm{V}(r\,,x)\,dr$$

si trova che $\Gamma(\psi) \neq 0$ e che quindi ψ, moltiplicato per una costante, si trasforma in una funzione φ_{n+1} soddisfacente alle

$$\Gamma(\varphi_{n+1}) = 1\,; \qquad \int\left[\int \mathrm{K}^{(n)}(x\,,r)\,\mathrm{V}(r\,,y)\,dr\right] \varphi_{n+1}(y)\,dy = \mu_{n+1}\,\varphi_{n+1}(x)\,.$$

Posto poi $v_j(x) = \int \mathrm{V}(z\,,x)\,\varphi_i(z)\,dz \ (i = 1\,,2\,,\ldots,n)$, si trova tosto che $\Gamma(\varphi_{n+1}\,,\varphi_i) = 0$.

per mezzo di esso si giunge facilmente alla φ_{n+1} ed a μ_{n+1}. Poichè, come già scrivemmo,

$$\mathrm{L}_1\left(f-\sum_1^n c_i\,p_i\right)=\mathrm{L}_1(f)-\sum_1^n|\mu_i|\,c_i^2$$

e $\mathrm{K}(x\,,y)$ è un nucleo definito positivo, se ne deduce:

Se $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\ldots$ *sono le successive funzioni eccezionali* (determinate p. es. col metodo precedente) *e se* $\mu_1\,,\mu_2\,,\ldots$ *sono i corrispondenti valori eccezionali disposti in ordine tale che* $|\mu_n|\geq|\mu_{n+1}|$, *allora le serie*

$$\sum|\mu_i|^3\quad,\quad\sum|\mu_i|\int u(x)\,\varphi_i(x)\,dx\int v(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

(dove $u\,,v$ sono funzioni arbitrarie) *convergono assolutamente e uniformemente.* E (come nella Memoria citata) *si dimostra che è identicamente*

$$\mathrm{L}_2(u\,,v)=\sum\mu_i\,|\mu_i|\int u(x)\,\varphi_i(x)\,dx\int v(x)\,\varphi_i(x)\,dx\,.$$

Se poi $u(x)$ *è una funzione che si può scrivere sotto la forma*

$$\int\mathrm{H}_2(x\,,y)\,p(y)\,dy$$

(dove al solito $p(y)$ e $p^2(y)$ sono integrabili), allora è:

$$u(x)=\sum\gamma_i\,\varphi_i(x),$$

dove

$$\gamma_i=\mu_i\,|\mu_i|\int\varphi_i(x)\,p(x)\,dx=\varepsilon_i\,\Gamma(u\,,\varphi_i),$$

e dove la serie del secondo membro converge assolutamente e uniformemente. Non è naturalmente escluso che alcune delle serie qui citate si riducano a somme.

Insomma tutti i teoremi della mia Memoria citata si possono, con qualche modificazione, estendere al caso attuale. Io ho solo ricordato qui i

---

Le equazioni precedenti si riducono perciò alle

$$\Gamma(\varphi_{n+1})=1\quad;\quad\int\left[\int\mathrm{K}(x\,,r)\,\mathrm{V}(r\,,y)\,dr\right]\varphi_{n+1}(y)\,dy=\mu_{n+1}\,\varphi_{n+1}(x).$$

A questa funzione φ_{n+1} che colle $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\ldots,\varphi_n$ forma un sistema coniugato normale, siamo giunti partendo dalla considerazione delle funzioni $\Phi=f-\sum c_i p_i$ che non soddisfano alle $\Gamma(\Phi\,,\varphi_i)=0$, ma invece alle $\int\Phi\varphi_i\,dx=0$ e quindi sono ortogonali alle φ. Invece le funzioni $\mathrm{F}(x)=\int\mathrm{K}(x\,,y)\,\Phi(y)\,dy$ soddisfano alle $\Gamma(\mathrm{F}\,,\varphi_i)=0$, o, come potremo dire, sono coniugate delle φ_i.

più importanti; che bastano però a rendere chiare le modificazioni che si devono portare negli enunciati.

Osservazione. — Noi potremmo anche pensare alle equazioni integrali, il cui *nucleo* $H(x, y)$, non simmetrico nelle x, y, è il quoziente *simbolico* di due funzioni simmetriche $K(x, y)$, $G(x, y)$, ossia soddisfa all'equazione

$$\int K(x, z)\, H(z, y)\, dz = G(x, y).$$

Lo studio di una tale equazione integrale

$$\mu\, \varphi(x) + \int H(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

è stato iniziato dal Marty in una recente Nota dei Comptes Rendus. Noi qui osserveremo soltanto che una tale equazione, moltiplicata per $K(x, z)$, e integrata rispetto a x si trasforma nella

$$\mu \int K(z, x)\, \varphi(x)\, dx + \int G(z, x)\, \varphi(x)\, dx = \int K(z, x)\, f(x)\, dx$$

che è una equazione integrale limite delle equazioni studiate al § 1, e alla quale si possono applicare in molti casi i procedimenti di questa Nota.

Matematica. — *Sull'iterazione*. Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

In ciò che segue mi propongo di esporre brevemente alcuni risultati sull'iterazione, alla ricerca dei quali fui spinto dalla lettura di una Nota di L. David (¹) relativa alla seguente proposizione: « l'algoritmo d'iterazione definito dalle equazioni

$$[x_s^{(r+1)}]^s = \frac{1}{\binom{n}{s}} \sum x_{\alpha_1}^{(r)} \cdot x_{\alpha_2}^{(r)} \cdot \ldots \cdot x_{\alpha_s}^{(r)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

(dove la sommatoria è estesa a tutti i possibili prodotti s ad s dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}$) quando sia data una legge che determini, per ogni valore di r, gli argomenti delle radici che qui figurano, è convergente per qualunque sistema di valori iniziali, reali o complessi, ed è

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \cdots = \lim_{r=\infty} x_n^{(r)} \text{ ».}$$

(¹) L. David, *Zur Theorie der Schapiraschen Iteration*, Journal für die reine und angewandte Mathematik. H. 1, Bd. 135.