ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

più importanti; che bastano però a rendere chiare le modificazioni che si devono portare negli enunciati.

Osservazione. — Noi potremmo anche pensare alle equazioni integrali, il cui *nucleo* $H(x, y)$, non simmetrico nelle x, y, è il quoziente *simbolico* di due funzioni simmetriche $K(x, y)$, $G(x, y)$, ossia soddisfa all'equazione

$$\int K(x, z)\, H(z, y)\, dz = G(x, y).$$

Lo studio di una tale equazione integrale

$$\mu\, \varphi(x) + \int H(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

è stato iniziato dal Marty in una recente Nota dei Comptes Rendus. Noi qui osserveremo soltanto che una tale equazione, moltiplicata per $K(x, z)$, e integrata rispetto a x si trasforma nella

$$\mu \int K(z, x)\, \varphi(x)\, dx + \int G(z, x)\, \varphi(x)\, dx = \int K(z, x)\, f(x)\, dx$$

che è una equazione integrale limite delle equazioni studiate al § 1, e alla quale si possono applicare in molti casi i procedimenti di questa Nota.

Matematica. — *Sull'iterazione*. Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

In ciò che segue mi propongo di esporre brevemente alcuni risultati sull'iterazione, alla ricerca dei quali fui spinto dalla lettura di una Nota di L. David [1] relativa alla seguente proposizione: « l'algoritmo d'iterazione definito dalle equazioni

$$[x_s^{(r+1)}]^s = \frac{1}{\binom{n}{s}} \sum x_{\alpha_1}^{(r)} \cdot x_{\alpha_2}^{(r)} \cdot \ldots \cdot x_{\alpha_s}^{(r)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

(dove la sommatoria è estesa a tutti i possibili prodotti s ad s dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}$) quando sia data una legge che determini, per ogni valore di r, gli argomenti delle radici che qui figurano, è convergente per qualunque sistema di valori iniziali, reali o complessi, ed è

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \cdots = \lim_{r=\infty} x_n^{(r)} \text{ ».}$$

[1] L. David, *Zur Theorie der Schapiraschen Iteration*, Journal für die reine und angewandte Mathematik. H. 1, Bd. 135.

Qui tratterò semplicemente il caso reale e per tre sole variabili; per quello generale di n variabili — reali o complesse — e per qualche applicazione rimanderò ad una mia Memoria che sarà tra poco pubblicata.

1. Sia $F(x_1, x_2, x_3)$ una funzione reale delle variabili reali x_1, x_2, x_3, data in tutto il campo reale ed ivi, eccettuati al più i punti all'infinito, continua e, rispetto ad ogni variabile, sempre crescente. Si consideri una successione infinita di punti $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$ e si supponga che: 1° sia

$$\lim_{r=\infty} F(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) = F(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono numeri reali finiti; 2° preso ad arbitrio un numero positivo ε, si possa sempre determinare un $\bar{r}$ tale che, per ogni $r > {}^{-}$, si abbia

$$x_s^{(r)} \leq x_s + \varepsilon \qquad (s = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Si avrà allora

$$\lim_{r=\infty} x_s^{(r)} = x_s \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Infatti, se ciò non fosse, si potrebbe scegliere, nella successione dei punti $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$, un'altra successione $(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)})$ tendente ad un punto limite $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ distinto da (x_1, x_2, x_3). Questo punto limite, per le (2), avrebbe le sue coordinate rispettivamente inferiori od eguali a quelle di (x_1, x_2, x_3), e la disuguaglianza $\bar{x}_s < x_s$ dovrebbe essere soddisfatta per *almeno* un valore dell'indice s. Allora, se le $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ fossero tutte finite, si avrebbe

$$\lim_{r_1=\infty} F(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)}) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) < F(x_1, x_2, x_3),$$

e ciò contro la (1). Se poi qualcuna delle $\bar{x}$ fosse infinita, si potrebbe scegliere un punto (x_1', x_2', x_3') a coordinate tutte finite e soddisfacenti alla condizione $\bar{x}_s < x_s' < x_s$ o all'altra $\bar{x}_s = x_s' = x_s$ secondochè è $\bar{x}_s < x_s$ oppure $\bar{x}_s = x_s$. Avendosi in tal punto $F(x_1', x_2', x_3') < F(x_1, x_2, x_3)$, si potrebbe, per la continuità, determinare un numero positivo η in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$F(x_1' + \eta, x_2' + \eta, x_3' + \eta) < F(x_1, x_2, x_3),$$

e perciò — essendo $\lim\limits_{r_1=\infty} x_s^{(r_1)} = \bar{x}_s < x_s' + \eta$ — si avrebbe, per ogni r_1

maggiore di un certo r,

$$x_s^{(r_1)} < x' + \eta \quad , \quad F(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)}) < F(x_1' + \eta , x_2' + \eta , x_3' + \eta),$$

$$\lim_{r_1=\infty} F(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)}) \leq F(x_1' + \eta , x_2' + \eta , x_3' + \eta) < F(x_1 , x_2 , x_3) ,$$

contro la (1).

Si può osservare che la proposizione precedente vale anche se, invece delle disuguaglianze (2), sono verificate, da un certo punto in poi, le altre

$$x_s^{(r)} \geq x_s - \varepsilon \qquad (s = 1 , 2 , 3).$$

2. Indicando con $f(x)$ la funzione di x che si ottiene ponendo nella F del numero precedente $x_1 = x_2 = x_3 = x$, l'equazione in x

$$f(x) = F(x_1 , x_2 , x_3) \tag{3}$$

ammette sempre, per ogni terna di numeri finiti x_1 , x_2 , x_3, una soluzione ed una sola. La cosa è evidente se è $x_1 = x_2 = x_3$; in caso diverso, indicando con m ed M rispettivamente il minimo ed il massimo dei tre numeri x_1 , x_2 , x_3, si ha, per le proprietà delle F,

$$F(m , m , m) < F(x_1 , x_2 , x_3) < F(M , M , M)$$
$$f(m) < F(x_1 , x_2 , x_3) < f(M),$$

e quindi esiste un x ed uno solo, soddisfacente alla doppia disuguaglianza $m < x < M$, che verifica la (3).

Osserviamo che, se aggiungessimo la condizione di essere la F simmetrica rispetto alle sue tre variabili, la soluzione della (3) darebbe la più generale delle *medie* dei numeri x_1 , x_2 , x_3.

3. Ciò premesso, consideriamo p funzioni F

$$F_1 , F_2 , \dots , F_p , \tag{4}$$

e dimostriamo la seguente proposizione:

Sia

$$(x_1^{(r)}) , x_2^{(r)} , x_3^{(r)}) \qquad (r = 1 , 2 , \dots)$$

una successione di punti, a coordinate finite, la quale goda della seguente proprietà: per ogni r si possa trovare in (4) *una* F_{q_r} *tale che la soluzione dell'equazione* $x^{(r)}$

$$f_{q_r}(x^{(r)}) = F_{q_r}(x_1^{(r-1)} , x_2^{(r-1)} , x_3^{(r-1)}) \tag{5}$$

non sia inferiore a nessuno dei tre numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$; *esistono allora, e sono tra loro uguali, i limiti*

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} \quad , \quad \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} \quad , \quad \lim_{r=\infty} x_3^{(r)} .$$

Osserviamo, dapprima, che, indicato con $\overline{x}^{(r)}$ il massimo dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, si ha, da una parte, per l'ipotesi fatta, $\overline{x}^{(r)} \leq x^{(r)}$ e, dall'altra, $x^{(r)} \leq \overline{x}^{(r-1)}$ (infatti è

$$f_{q_r}(x^{(r)}) = \mathrm{F}_{q_r}(x_1^{(r-1)}, x_2^{(r-1)}, x_3^{(r-1)}) < \mathrm{F}_{q_r}(\overline{x}^{(r-1)}, \overline{x}^{(r-1)}, \overline{x}^{(r-1)}) = f_{q_r}(\overline{x}^{(r-1)})) ;$$

e perciò, riunendo,

$$\overline{x}^{(r)} \leq \overline{x}^{(r-1)}.$$

Esiste quindi il limite

$$\lim_{r=\infty} \overline{x}^{(r)} = x , \tag{6}$$

e questo limite potrà essere finito oppure uguale a $-\infty$. In quest'ultimo caso, essendo $\overline{x}^{(r)}$ il massimo dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, la proposizione risulta già dimostrata. Rimane dunque a considerare l'ipotesi di x finito, nella quale possiamo dire che, preso un ε piccolo ad arbitrio e positivo, per ogni r maggiore di un certo $\overline{r}$, è

$$x_s^{(r)} < x + \varepsilon \qquad (s = 1 , 2 , 3). \tag{7}$$

Notiamo, ora, che fra le (4) ve ne sono certamente alcune che compariscono infinite volte nella successione

$$\mathrm{F}_{q_1}, \mathrm{F}_{q_2}, \dots, \mathrm{F}_{q_r}, \dots$$

Per comodità di scrittura supporremo che tali F siano le prime p' $(1 \leq p' \leq p)$, e solamente esse. Siano, allora,

$$r_1 , r_2 , \dots \tag{8}$$

i valori dell'indice r per i quali è $\mathrm{F}_{q_r} = \mathrm{F}_1$. Si ha, per quanto è già stato osservato,

$$\overline{x}^{(r_\nu)} \leq x^{(r_\nu)} \leq \overline{x}^{(r_\nu - 1)} \qquad (\nu = 1 , 2 , \dots),$$

e, per la (6),

$$\lim_{\nu=\infty} x^{(r_\nu)} = x ,$$

ossia, per la continuità della f_1 e per la (5),

$$\lim_{\nu=\infty} f_1(x^{(r_\nu)}) = f_1(x)$$

$$\lim_{\nu=\infty} F_1(x_1^{(r_\nu-1)}, x_2^{(r_\nu-1)}, x_3^{(r_\nu-1)}) = f_1(x) = F_1(x, x, x).$$

Da quest' uguaglianza e dalla disuguaglianza (5) risulta, per la proposizione del n. 1, che esistono i limiti delle $x_s^{(r_\nu-1)}$ per $\nu = \infty$ e che è

$$\lim_{\nu=\infty} x_s^{(r_\nu-1)} = x \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Al medesimo risultato si giunge prendendo successivamente in considerazione, invece della (8), le successioni dei valori dell' indice r per i quali è, rispettivamente, $F_{q_r} = F_2, \dots, F_{q_r} = F_{p'}$. Siccome p' è un numero finito ($\leq p$), si conclude che esistono i limiti per $r = \infty$ di $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, e che è

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_3^{(r)},$$

come appunto dovevasi dimostrare.

Si può osservare che il limite delle $x_s^{(r)}$ è certamente minore od uguale al massimo dei numeri $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ (sempre minore se questi x non sono tutti eguali).

4. Corrispondentemente alla proposizione dimostrata al numero precedente si ha quest'altra:

Sia

$$(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

una successione di punti, a coordinate finite, la quale goda della seguente proprietà: per ogni r *si possa trovare in* (4) *una* F_{q_r} *tale che la soluzione dell'equazione in* $x^{(r)}$

$$f_{q_r}(x^{(r)}) = F_{q_r}(x_1^{(r-1)}, x_2^{(r-1)}, x_3^{(r-1)})$$

non sia superiore a nessuno dei tre numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$; *esistono, allora, e sono tra loro uguali, i limiti*

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)}, \quad \lim_{r=\infty} x_2^{(r)}, \quad \lim_{r=\infty} x_3^{(r)}.$$

Per dimostrare questa proposizione basta ripetere il ragionamento fatto al numero precedente sostituendo alla considerazione del massimo dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, quella del minimo. Naturalmente le disuguaglianze verranno tutte cambiate di senso, e le (7) verranno sostituite dalle $x_s^{(r)} > x_s - \varepsilon$; si dovrà, perciò, tener conto dell'osservazione fatta alla fine del n. 1. Qui il limite delle $x_s^{(r)}$ risulta certamente maggiore od uguale al minimo dei numeri $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ (sempre maggiore se queste x non sono tutte eguali).

5. Si consideri *l'algoritmo d'iterazione* definito dalle equazioni

$$
\begin{aligned}
f_1^{(r+1)}(x_1^{(r+1)}) &= F_1^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \\
f_2^{(r+1)}(x_2^{(r+1)}) &= F_2^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \\
f_3^{(r+1)}(x_3^{(r+1)}) &= F_3^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \quad ,
\end{aligned}
$$

dove le $F^{(r+1)}$ sono scelte con una determinata legge fra le (4).

Quest'algoritmo è di quelli che chiamansi *mutabili* perchè le sue equazioni di definizione possono mutare ad ogni punto dell'iterazione.

Si fissi un r e sia $x_1^{(r+1)}$ il massimo (o uno dei massimi) dei numeri $x_1^{(r+1)}, x_2^{(r+1)}, x_3^{(r+1)}$, i quali risultano, perciò, tutti minori od eguali alla soluzione dell'equazione in $x_s^{(r+1)}$

$$
f_s^{(r+1)}(x_s^{(r+1)}) = F_s^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}).
$$

È allora verificata la condizione della proposizione del n. 3 e possiamo dire che *l'algoritmo definito dalle equazioni precedenti è convergente, ed è*

$$
\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_3^{(r)} .
$$

Da questa dimostrazione segue, per un'osservazione fatta alla fine del n. 3, che il limite comune delle $x_s^{(r)}$ è minore od uguale al massimo dei valori iniziali $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$.

La nostra proposizione si può però ottenere considerando, invece del massimo dei numeri $x_1^{(r+1)}, x_2^{(r+1)}, x_3^{(r+1)}$, il minimo ed applicando ciò che si è detto al n. 4: risulta, allora, che il limite comune delle $x_s^{(r)}$ è maggiore od uguale al minimo dei valori iniziali.

Si conclude, perciò, che il limite delle $x_s^{(r)}$ è compreso tra il minimo ed il massimo dei valori iniziali $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ (ed è certamente maggiore del minimo e minore del massimo se minimo e massimo non coincidono).