ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

« campo debole normale al detto piano, e gira, per la (5), con la velocità « angolare

$$\omega = \frac{AHe}{2m} \text{ ».}$$

La cosa fu riconosciuta già, recentemente, dal Righi, per il caso dei sistemi che dànno origine ai cosidetti raggi magnetici (1).

Paleontologia. — *Alcuni mammiferi fossili del Genovesato e del Savonese.* Memoria del Corrisp. A. Issel.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie.* Nota del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Recentemente (2) il prof. G. Lauricella, completando un resultato del prof. E. Picard (3), dimostrava che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, U(x\,,y)\, dx = g(y)$$

ammetta una soluzione $f(x)$ atta all'integrazione insieme al suo quadrato $f^2(x)$ nell'intervallo $a\,b$ sono:

1°) che una certa serie Σa_n^2 sia convergente;

2°) che la $g(y)$ sia esprimibile per mezzo di una serie di Fourier-Hilbert procedente per certe funzioni date $\varphi_1(y)\,,\varphi_2(y)\,,\ldots\,,\varphi_n(y)\,,\ldots$

Il problema della risolubilità della equazione (1) viene così ricondotto a determinare quando una funzione $g(y)$ è sviluppabile in una serie di Fourier-Hilbert di funzioni date $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\ldots\,,$ problema difficile, di cui non è ancora stata data una soluzione esauriente.

Ad un risultato analogo noi eravamo giunti (4) nel caso particolare in cui l'integrale del primo membro è esteso ad un contorno chiuso e le funzioni che si considerano sono funzioni uniformi dei punti di quel contorno.

(1) Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [2], 241 e 301, 1909.
(2) Comptes Rendus, 14 giugno 1909.
(3) Atti della R. Accademia dei Lincei, 1 agosto 1909.
(4) Annali di Matematica, marzo 1909.

Nella presenta Nota ci permettiamo di tornare sull'argomento per presentare un nuovo criterio, valevole pel caso generale, che, se non erriamo, ci sembra più elementare.

2. Premettiamo il seguente problema. Essendo dato nell'intervallo ab un certo numero m di funzioni $u_1(x)\,,\, u_2(x)\,,\ldots,\, u_m(x)$ linearmente indipendenti, atte all'integrazione insieme ai loro quadrati in tutto l'intervallo, e corrispondentemente m costanti $c_1\,,\, c_2\,,\ldots,\, c_m$ determinare fra tutte le funzioni che soddisfano simultaneamente alle equazioni

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r \qquad (r = 1\,,\, 2\,,\ldots,\, m) \tag{2}$$

quella per cui l'integrale $\mathrm{I} = \int_a^b f^2(x)\, dx$ è un minimo.

Secondo i principî del calcolo delle variazioni, otteniamo, uguagliando a zero, la variazione prima dell'integrale I e tenuto conto della (2)

$$\int_a^b (f(x) - \lambda_1 u_1(x) - \cdots - \lambda_m u_m(x))\, \delta f\, dx = 0\,,$$

tale relazione dovendo aver luogo qualunque sia δf dovrà essere

$$f(x) = \lambda_1 u_1(x) + \cdots + \lambda_m u_m(x)\,,$$

da cui eliminando $\lambda_1\,,\ldots,\,\lambda_m$ per mezzo della (2), dopo aver posto

$$a_{rs} = \int_a^b u_r(x)\, u_s(x)\, dx\,,$$

si ottiene

$$f(x) = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & c_m \\ u_1(x) & \ldots & u_m(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}}\,. \tag{3}$$

È facile vedere che l'espressione precedente rappresenta effettivamente una soluzione delle (2), il denominatore essendo diverso da zero, poichè le $u_1(x) \ldots u_m(x)$ sono linearmente indipendenti [1].

[1] Vale la pena di enunciare a parte il risultato seguente, che sostituisce con vantaggio il criterio dato dall'annullarsi del Wronskiano, e che si dimostra molto facilmente:

Il valore del minimo I è quindi

$$I=\int_a^b f^2(x)\,dx=-\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & c_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & c_m \\ c_1 & \dots & c_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}.$$

Il numeratore essendo una forma quadratica irriducibile nelle $c_1, c_2, \dots, c_m$, possiamo ridurlo ad una forma canonica in m variabili, e la riduzione si ottiene ponendo:

$$\Gamma_r=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,r-1} & c_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{r1} \dots a_{r\,r-1} & c_m \end{vmatrix}, \quad B_r=\int_a^b \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,r-1} & u_1(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{r1} \dots a_{r\,r-1} & u_r(x) \end{vmatrix}^2 dx\,,$$

« Condizione necessaria e sufficiente perchè m funzioni $u_1(x), \dots, u_m(x)$ definite nell'intervallo ab, non identicamente nulle, sieno linearmente indipendenti è che sia

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0,$$

essendo

$$a_{rs}=\int_a^b u_r(x)\,u_s(x)\,dx\ \text{»}.$$

Infatti, se una delle $u_\mu(x)$ si può ottenere come combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle rimanenti, nel determinante $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}$ una colonna si ottiene come combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle rimanenti, e quindi quel determinante è nullo.

Viceversa, essendo

$$\int_a^b \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,m-1} & u_1(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} \dots a_{m\,m-1} & u_m(x) \end{vmatrix}^2 dx=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1\,m-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \dots a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix},$$

se è $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}=0$, o la $u_m(x)$ è una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti delle precedenti, oppure è anche $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \dots a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}=0$, ecc.

da cui

$$I = \frac{\Gamma_1^2}{B_1} + \frac{\Gamma_2^2}{B_2} + \cdots + \frac{\Gamma_m^2}{B_m}.$$

La forma è quindi definita positiva.

2. Vediamo come si modifica il problema, allorquando le funzioni $u_1(x) \dots u_m(x)$ non sono più linearmente indipendenti, ma sono legate da un certo numero di relazioni identiche

$$b_{\rho 1} u_1(x) + b_{\rho 2} u_2(x) + \cdots + b_{\rho m} u_m(x) = 0 \quad , \quad \rho = 1, 2, \dots, \mu \leq m$$

le $b_{\rho s}$ essendo costanti.

Evidentemente in questo caso il problema non è sempre risolubile, e la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità è che $c_1 \dots c_m$ sieno legate dalle relazioni corrispondenti

$$b_{\rho 1} c_1 + b_{\rho 2} c_2 + \cdots + b_{\rho m} c_m = 0 \quad , \quad \rho = 1, 2, \dots, \mu \leq m$$

le $b_{\rho s}$ essendo le stesse costanti precedenti.

Sia B_{ρ_1} tra le B_r la prima che si annulli, $\rho_1 \geq 1$. Conveniamo allora in tutti i determinanti Γ_r ed in tutti i determinanti che compariscono sotto il segno in B_r, per tutti gli indici $r > \rho_1$ di sopprimere la ρ_1^{esima} linea e la ρ_1^{esima} colonna.

Sia B_{ρ_2} la seconda tra le B_r che si annulli, $\rho_2 > \rho_1$. Conveniamo nei determinanti Γ_r e nei determinanti che compariscono sotto il segno in B_r, per tutti gli indici $r > \rho_2$, nei quali abbiamo già soppresso la ρ_1^{esima} linea e la ρ_1^{esima} colonna, di sopprimere la ρ_2^{esima} linea e la ρ_2^{esima} colonna, e così via per tutte le B_r che si annullano.

Fatte tutte le soppressioni, diciamo Γ_r' e B_r' le espressioni che si ottengono.

La condizione precedente di risolubilità si può esprimere dicendo che, ove sia $B_s' = 0$, deve essere ancora $\Gamma_s' = 0$.

Conveniamo ancora di porre per definizione $\frac{\Gamma_s'^2}{B_s'} = 0$, ove sia

$$\Gamma_s' = B_s' = 0 .$$

Supposta soddisfatta la condizione di risolubilità, l'espressione

$$I = \frac{\Gamma_1'^2}{B_1'} + \frac{\Gamma_2'^2}{B_2'} + \cdots + \frac{\Gamma_m'^2}{B_m'}$$

ha un valore determinato e finito, e rappresenta il minimo dell'integrale $\int_a^b f^2(x)\,dx$, $f(x)$ essendo una funzione che soddisfa alle (2) proposte.

Ove la condizione di risolubilità non risulti soddisfatta, la espressione precedente non ha più alcun significato, essendovi in essa qualche termine che assume la forma $\frac{p}{0}$.

4. Ciò premesso, sia $f_0(x)$ una soluzione dell'equazione integrale (1), essendo $\int_a^b f_0^2(x)\,dx < \mathrm{A}$. Poniamo

$$(4) \qquad \begin{cases} u_r(x) = \int_a^b y^{r-1}\mathrm{V}(x\,,y)\,dy \\ c_r = \int_a^b y^{r-1}\,g(y)\,dy\,. \end{cases}$$

La funzione $f_0(x)$ soddisfa al sistema di equazioni

$$\int_a^b f_0(x)\,u_r(x)\,dx = c_r \qquad r = 1\,,2\,,\ldots,m$$

qualunque sia m, onde, costruite le Γ_m' e le B_m' secondo i numeri precedenti, abbiamo $\sum_1^m{}_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{\mathrm{B}_\mu'} < \mathrm{A}$, qualunque sia m; e quindi la serie $\Sigma_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{\mathrm{B}_\mu'}$ converge. La convergenza di quella serie è quindi condizione necessaria per la risolubilità dell'equazione (1).

5. Mostriamo che è sufficiente. Poniamo

$$(5) \qquad v_r(x) = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\,r-1}\, u_1(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1} \ldots a_{r\,r-1}\, u_r(x) \end{vmatrix},$$

e conveniamo, se v_ρ è identicamente nulla, $\rho \geq 1$, di sopprimere entro v_r, $r > \rho$, la ρ^{esima} linea e la ρ^{esima} colonna: diciamo $v_r'(x)$ le funzioni che così si ottengono.

Abbiamo

$$\int_a^b v_\mu'(x)\,u_\nu(x)\,dx = 0\,, \quad \nu < \mu$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b v_\mu'(x)\,v_\nu'(x)\,dx &= 0 \qquad \nu \neq \mu \\ &= \mathrm{B}_\mu' \qquad \nu = \mu\,. \end{aligned}$$

Poniamo ancora

$$(6) \qquad w_\mu(x) = \frac{v_\mu'(x)}{+\sqrt{\mathrm{B}_\mu'}}\,.$$

Questa espressione non ha significato quando è $\mathrm{B}_\mu' = 0$, assumendo allora la forma $\frac{0}{0}$: perciò conveniamo di scartare quelle delle $v_\mu'(x)$ che sono $\equiv 0$, e di limitare alle rimanenti la posizione (6), per queste si ottiene

$$\int_a^b w_\mu(x)\, w_\nu(x)\, dx = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu$$
$$= 1 \quad , \quad \mu = \nu .$$

Per un noto teorema di Riesz [1], la serie $\Sigma_\mu \dfrac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ essendo convergente, esisterà una funzione $f(x)$ per cui

$$\int_a^b f(x)\, w_\mu(x)\, dx = \frac{\Gamma_\mu'}{\sqrt{B_\mu'}}$$

qualunque sia l'indice di $w_\mu(x)$, e quindi avremo

$$\int_a^b f(x)\, v_\mu'(x)\, dx = \Gamma_\mu' ,$$

relazione che vale anche per quelle delle $v_\mu'(x)$ che fossero identicamente nulle, riducendosi in quel caso alla identità $0 = 0$. Quella relazione sussiste quindi per tutti i valori di μ, onde sostituendo per Γ_μ' e $v_\mu'(x)$ le loro e.pressioni, si ottiene

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r$$

qualunque sia r. Posto quindi

$$h(y) = g(y) - \int_a^b f(x)\, V(x, y)\, dx ,$$

abbiamo

$$\int_a^b y^{r-1}\, h(y)\, dy = \int_a^b y^{r-1}\, g(y)\, dy - \int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r - c_r = 0$$

qualunque sia r, da cui si conclude $h(y) \equiv 0$.

Conclusione. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una soluzione dell'equazione* (1) *atta all'integrazione insieme al suo quadrato nell'intervallo ab, è che la serie $\Sigma \dfrac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ sia convergente.*

Se quella condizione è soddisfatta $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_\mu', \ldots$, rappresentano i valori degli integrali

$$\int_a^b f(x)\, v_1'(x)\, dx \, , \int_a^b f(x)\, v_2'(x)\, dx \, , \ldots , \int_a^b f(x)\, v_\mu'(x)\, dx \, , \ldots$$

[1] *Ueber ortogonale Funcktionensysteme*, Nachr. zu Gott., 1907.

6. Il metodo seguito nella precedente trattazione consiste in sostanza nel determinare una funzione $f(x)$ che soddisfi alle infinite equazioni

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r\,, \qquad r = 1\,, 2\,, \ldots\,,$$

ove è

$$u_r(x) = \int_a^b y^{r-1}\,\mathrm{V}(x\,, y)\, dy \quad , \quad c_r = \int_a^b y^{r-1} g(y)\, dy\,.$$

Quella trattazione rimarrebbe inalterata, ove si ponesse invece

$$u_r(x) = \int_a^b \mathrm{V}(x\,, y)\, \varphi_r(y)\, dy \quad , \quad c_r = \int_a^b g(y)\, \varphi_r(y)\, dy\,,$$

$\varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots$, essendo funzioni soggette all'unica condizione di costituire un sistema chiuso, tale cioè che non esista nessuna funzione non identicamente nulla $h(x)$ per cui sia $\int_a^b h(x)\, \varphi_r(x)\, dx = 0$ per ogni valore di r.

7. Dei risultati ottenuti si può dare una elegante interpretazione geometrica.

Supponiamo per semplicità che $u_1\,, \ldots\,, u_m$ sieno linearmente indipendenti, e poniamo

$$k_m = \frac{\Gamma_1^{\,2}}{\mathrm{B}_1} + \frac{\Gamma_2^{\,2}}{\mathrm{B}_2} + \cdots + \frac{\Gamma_m^{\,2}}{\mathrm{B}_m} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & c_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}}\,.$$

Diciamo A_m il determinante denominatore, ed $\mathrm{A}_{rs}^{(m)}$ il complemento algebrico di a_{rs} in quello.

In uno spazio ad m dimensioni consideriamo la quadrica irriducibile Q_m di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma\, a_{rs}\, \xi_r\, \xi_s = 0$ ed in coordinate di iperpiani $\frac{1}{\mathrm{A}_m}\, \Sigma\, \mathrm{A}_{rs}^{(m)}\, \eta_r \eta_s = 0$; k_m rappresenta appunto il valore che assume il primo membro di quell'ultima equazione, ove si pongano per $\eta_1\,, \eta_2\,, \ldots\,, \eta_m$ le coordinate $c_1\,, c_2\,, \ldots\,, c_m$ che nello spazio considerato si possono ritenere come le coordinate di un certo iperpiano $\mathit{\Lambda}_m$ ad m dimensioni.

Supponiamo che, crescendo m indefinitamente, $u_1\,, u_2\,, \ldots\,, u_m$ restino sempre linearmente indipendenti. Seguendo un concetto sviluppato dal professore S. Pincherle, possiamo allora considerare in uno spazio ad un numero infinito di dimensioni la quadrica irriducibile Q_∞ di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma a_{rs}\xi_r\xi_s=0$, ed in coordinate di piani è

$$\frac{1}{A_\infty}\Sigma A_{rs}^{(\infty)}\eta_r\eta_s=0 .$$

In quello spazio la funzione $g(y)$ è rappresentata da un iperpiano $\mathcal{A}$ ad infinite dimensioni, precisamente dall'iperpiano le cui coordinate sono $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$

Segando la quadrica Q e l'iperpiano $\mathcal{A}$ coll'iperpiano coordinato ad r dimensioni $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ otteniamo per sezione la quadrica Q_r e l'iperpiano ad $r-1$ dimensioni $\mathcal{A}_r$.

La condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) sia risolubile è che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q_r, sostituitevi le coordinate del piano $\mathcal{A}_r$, conservi, al crescere di m, un valore determinato e finito: brevemente che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q, sostituitevi le coordinate dell'iperpiano $\mathcal{A}$ abbia un valore determinato e finito.

Analogo, ma più complicato nella esposizione, è il caso in cui le $u_1, u_2, \ldots$ non sono linearmente indipendenti.

8. Osserviamo finalmente che la trattazione precedente si estende senza incontrare difficoltà essenziali, alla equazione

$$g(\eta_1 \ldots \eta_n)=\int_\sigma f(\xi_1 \ldots \xi_m)\, V(\xi_1 \ldots \xi_m|\eta_1 \ldots \eta_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m ,$$

$\xi_1 \ldots \xi_m$ variando entro un campo σ ad m dimensioni, $\eta_1 \ldots \eta_n$ entro un campo τ ad n dimensioni.

Meccanica. — *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio Levi-Civita.

In questa Nota stabilisco una proprietà, che mostra la dipendenza dei problemi di moto stazionario lento dei liquidi viscosi, da problemi di equilibrio elastico: precisamente, faccio vedere che la determinazione della velocità delle particelle liquide nel moto stazionario lento di un liquido viscoso, che occupa lo spazio S interno od esterno ad una superficie chiusa σ, nell'ipotesi che nei punti di σ si conosca la velocità delle particelle stesse, si effettua immediatamente allorchè sia determinata la deformazione del solido S, riguardato come elastico ed isotropo, nel caso in cui si conosca lo spostamento subìto dai punti del contorno σ. Basta infatti dare un valore particolare alla costante di elasticità.