ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 giugno 1910.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un'estensione di un teorema di Lindelöf nel calcolo delle variazioni.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nel problema della superficie minima di rotazione, un arco AB di catenaria

$$y = m \cosh \frac{x}{m}$$

ha effettivamente la proprietà di minimo allora ed allora soltanto quando le tangenti negli estremi A , B si incontrano prima della direttrice $y = 0$ (asse di rotazione).

Il caso in cui le tangenti in A , B vanno ad incontrarsi precisamente sulla direttrice è particolarmente notevole. In tal caso gli estremi A , B sono coniugati nel senso di Jacobi e sussiste l'elegante proprietà scoperta da Lindelöf: *L'area generata dalla rotazione dell'arco* AB *di catenaria è eguale alla somma delle superficie laterali dei due coni generati dai tratti rettilinei* AC , BC *delle tangenti in* A , B *fino all'incontro in* C *colla direttrice.*

Non so che sia stata osservata la generalizzazione seguente del teorema di Lindelöf.

Le catenarie di direttrice $y = 0$ sono le curve estremali per l' integrale a limiti fissi

$$J = \int y \, ds$$

e il teorema di Lindelöf, nell'ipotesi che A, B siano coniugati, si scrive colla formola

$$J_{AB} = J_{AC} + J_{BC}, \tag{1}$$

l'integrale del primo membro essendo esteso all'arco AB di estremale e quelli del secondo ai due tratti di tangenti AC, BC. La generalizzazione indicata consiste in ciò che: *la formola* (1), *e quindi il teorema di Lindelöf, sussiste ancora per le curve estremali dell'integrale*

$$J = \int y^p \, ds,$$

ove l'esponente p si supponga soltanto positivo. Per es. per $p = \frac{1}{2}$ questo integrale rappresenta, a meno di un fattore costante, l'azione di Maupertuis relativa alla forza di gravità e il teorema di Lindelöf dice che l'azione nel moto di un punto pesante per un arco parabolico AB, ad estremi coniugati, è eguale alla somma delle azioni pei tratti rettilinei tangenti AC, BC, che si incontrano in C sulla direttrice della parabola.

Lo stesso teorema generalizzato di Lindelöf può ricevere, come si vedrà, una interpretazione geometrica notevole per gli archi geodetici tracciati sulle superficie evolute di quelle superficie per le quali il rapporto dei raggi principali di curvatura è una costante negativa.

2. Ricordo dapprima alcune proprietà delle curve estremali per l'integrale

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y^p \sqrt{1 + y'^2} \, dx, \tag{2}$$

con esponente p positivo, sviluppate da pagina 127 a 130 del recente libro di Hadamard [1], aggiungendovi alcune considerazioni complementari.

L'equazione differenziale d'Eulero

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

per la funzione $f = y^p \sqrt{1 + y'^2}$ sotto il segno integrale in (2), si scrive

$$\frac{yy''}{1 + y'^2} = p, \tag{3}$$

e, essendo y'' positiva con y, la curva estremale volge costantemente la convessità verso la direttrice $y = 0$. Scrivendo la (3) così

$$\frac{y\sqrt{1 + y'^2}}{\dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}} = p,$$

[1] *Leçons sur le calcul des variations*, tome I, Paris, Hermann (1910).

si vede che: *Le curve estremali del nostro problema sono quelle per le quali la normale ed il raggio di curvatura sono rivolti in verso contrario ed hanno il rapporto costante* $= p$.

Facendo rotare queste curve attorno alla direttrice si hanno dunque le superficie di rotazione coi raggi principali di curvatura opposti in segno ed in rapporto costante. Ne risulta anche subito che la doppia infinità di estremali si ottiene da una curva estremale fissa combinando una traslazione nel senso della direttrice con una omotetia col centro su questa retta.

Dall'integrale primo

$$y^p \frac{dx}{ds} = m^p \quad (m \text{ costante})$$

dell'equazione (3) d'Eulero si trae per l'equazione in termini finiti della estremale

$$x = c \pm \int_m^y \frac{m^p\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}.$$

Essendo qui p positivo, ogni punto della curva (escluso il vertice) ha uno ed un solo punto coniugato; due punti coniugati sono da parti opposte del vertice e le tangenti in essi si segano sulla direttrice (Hadamard, loc. cit., e Bolza, *Variationsrechnung*, pag. 80).

3. Per dimostrare il teorema generalizzato di Lindelöf, cioè la formola (1), scriviamo per semplicità l'equazione della curva estremale

$$x = \pm \int_m^y \frac{m^p dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}, \tag{4}$$

avendo fatto passare l'asse delle y pel vertice $V \equiv (0, m)$. Siano

$$A \equiv (x_1, y_1) \quad , \quad B \equiv (x_2, y_2)$$

due punti coniugati sull'estremale (4), onde saranno le ascisse x_1, x_2 di segno contrario poniamo $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, e si avrà quindi

$$x_1 = -m^p \int_m^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} \quad , \quad x_2 = m^p \int_m^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}. \tag{5}$$

Le tangenti in A, B, di equazioni

$$\begin{cases} y - y_1 = -\dfrac{1}{m^p} \sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}\,(x - x_1) \\ y - y_2 = \dfrac{1}{m^p} \sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}\,(x - x_2) \end{cases} \tag{6}$$

passano per un medesimo punto $C \equiv (\xi, 0)$ della direttrice e sussistono quindi, per le (4), (5), le formole

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} - \displaystyle\int_m^{y_1} \dfrac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = \dfrac{\xi}{m^p}, \\[2ex] \dfrac{y_2}{\sqrt{y_2^{2p}} \; m^{2p}} - \displaystyle\int_m^{y_2} \dfrac{dy}{\sqrt{y^{2p}} \; m^{2p}} = \dfrac{\xi}{m^p}. \end{cases}$$

Per l'estremale (4) l'elemento d'arco è

$$ds = \frac{y^p \, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}$$

e l'integrale fondamentale J prende la forma

$$J = \int \frac{y^{2p} \, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}};$$

avremo quindi

$$(8) \qquad J_{AB} = \int_m^{y_1} \frac{y^{2p} \, dy}{\sqrt{y^{2p}} \; m^{2p}} + \int_m^{y_2} \frac{y^{2p} \, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}.$$

Calcoliamo ora i valori degli integrali

$$J_{AC}, J_{BC},$$

estesi ai tratti rettilinei di tangenti AC, BC. Lungo il tratto AC abbiamo per es. per la (7)

$$ds = \frac{y_1^p}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} \, dy,$$

e quindi

$$J_{AC} = \frac{y_1^p}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} \int_m^{y_1} y^p \, dy = \frac{1}{p+1} \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}},$$

e similmente

$$J_{BC} = \frac{1}{p+1} \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}}.$$

L'eguaglianza (1) è contenuta nella formola

$$(9) \qquad (p+1) \int_m^{y_1} \frac{y^{2p} \, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} + (p+1) \int_m^{y_2} \frac{y^{2p} \, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = \\ = \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} + \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}},$$

che dobbiamo dunque verificare.

Differenziando $y\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}$ abbiamo

$$d\left(y\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}\right)=\frac{(p+1)\,y^{2p}-m^{2p}}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\,dy\,,$$

e integrando da m ad y_1, risulta l'identità

$$\int_m^{y_1}\frac{(p+1)\,y^{2p}-m^{2p}}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\,dy=y_1\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}=\frac{y_1^{2p+1}-m^{2p}\,y_1}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}}\,,$$

che possiamo scrivere

$$\frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}}-(p+1)\int_m^{y_1}\frac{y^{2p}\,dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}=$$

$$=m^{2p}\left\{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}}-\int_m^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\right\}.$$

Sommando questa coll'identità analoga in y_2

$$\frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p}-m^{2p}}}-(p+1)\int_m^{y_2}\frac{y^{2p}\,dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}=$$

$$=m^{2p}\left\{\frac{y_2}{\sqrt{y_2^{2p}-m^{2p}}}-\int_m^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\right\},$$

ed osservando che, a causa delle (7), i secondi membri sono eguali e di segno contrario, si ottiene appunto la (9). Il teorema generalizzato di Lindelöf è così dimostrato.

4. Si può riguardare l'elemento d'integrale (2) come elemento lineare ds di una moltiplicità a due dimensioni definita da

$$ds^2=y^{2p}(dx^2+dy^2)\,, \tag{10}$$

ed il problema di minimizzare l'integrale J corrisponde allora a ricercare le linee geodetiche in questa moltiplicità.

È notevole che le superficie dello spazio ordinario alle quali appartiene l'elemento lineare (10) non sono altro, come ora vedremo, che le superficie generate dalla rotazione delle evolute delle nostre curve estremali attorno alla direttrice. In generale il ds^2 dato dalla (10) appartiene (secondo il teorema di Weingarten) alle evolute di quelle superficie i cui raggi principali di curvatura sono in rapporto costante negativo.

Ma per dare la nuova interpretazione geometrica del teorema generalizzato di Lindelöf conviene dapprima prescindere da ogni particolare forma di superficie realizzante l'elemento lineare (10) e riguardare, al modo di Riemann-Beltrami, la moltiplicità generale a due dimensioni definita, in tutta la sua estensione, dalla (10) stessa. Allora il piano xy non è che un piano rappresentativo per la nostra moltiplicità, che su di esso viene colla (10) rappresentata in modo *conforme*. Le curve estremali sono le immagini delle linee geodetiche, mentre le rette del piano xy vengono a rappresentare le *lossodromiche* della moltiplicità, cioè le trajettorie isogonali dei meridiani $x =$ costante.

Dopo queste osservazioni, ove si consideri sulla multiplicità (10) un arco geodetico AB e i cui estremi A, B siano coniugati nel senso di Jacobi [1], si può enunciare il teorema di Lindelöf generalizzato sotto la forma seguente:

Le due lossodromiche tangenti all'arco geodetico AB *nei due estremi coniugati* A, B *si incontrano in un punto* C, *e l'arco geodetico* AB *è eguale alla somma dei due archi lossodromici* AC, BC.

Ritornando ora alla curva estremale (4), si ha pel suo raggio ϱ di curvatura

$$\varrho = \frac{y^{p+1}}{m^p}$$

e per l'ordinata r del centro di curvatura

$$r = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{p+1}{p}\,y\,.$$

Poichè l'arco u della evoluta è precisamente ϱ, si vede che r è proporzionale alla potenza $u^{\frac{1}{p+1}}$ dell'arco, e quindi se questa evoluta rota attorno alla direttrice, l'elemento lineare della superficie di rotazione generata sarà

$$ds^2 = du^2 + u^{\frac{2}{p+1}}\,dv^2\,. \tag{11}$$

Se qui si opera un cangiamento di parametri u, v ponendo

$$u = \frac{p}{p+1}\,y^{\frac{p+1}{p}}\,,\quad v = \frac{p+1}{p}\,x,$$

la (11) si converte in

$$ds^2 = y^{\frac{2}{p}}(dx^2 + dy^2)$$

che è la (10) stessa, cangiato p in $\frac{1}{p}$ [2].

[1] Si noti che la curvatura K della moltiplicità (10) è data da

$$\mathrm{K} = \frac{p}{y^{2p+2}}\,,$$

onde è essenzialmente positiva.

[2] La stessa cosa risulta dall'applicare le formole generali del teorema di Wein-

L'elemento lineare (10) appartiene dunque in effetto alle superficie di rotazione che hanno per meridiani le evolute delle nostre curve estremali e per asse di rotazione la direttrice. Su queste superficie si presenta però un parallelo cuspidale, corrispondente alla cuspide della evoluta o al vertice della curva estremale. La rappresentazione sopra una tale superficie della metrica definita dalla (10) resta per ciò incompleta e il teorema di Lindelöf sopra enunciato ha qui un significato soltanto ove si consideri la differenza fra l'arco geodetico AB e gli archi lossodromici tangenti terminati al parallelo cuspidale; questa differenza, sempre positiva, tende a zero quando, deformando la superficie di rotazione, si faccia tendere a zero il raggio del parallelo di regresso.

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie rigate applicabili sul catenoide.* Nota del Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Gli ovarioli delle fillossere.* Nota (24ª) del Socio B. Grassi.

Riassumo qui brevemente le mie ricerche intorno agli ovarioli della fillossera della vite, rimandando per la letteratura dell'argomento all'opera in corso di stampa, nella quale sono riunite tutte le ricerche mie e dei miei scolari sulle *Phylloxerinae*, corredate delle notizie storiche raccolte con la massima scrupolosità.

Allo studio degli ovarioli sono stato condotto da quelle esperienze, le quali ci avevano dato la certezza che nella fillossera della vite una stessa forma può diventare alata sessupara ovvero attera virginopara, ovvero ninfale, ordinariamente virginopara, eccezionalmente sessupara. I risultati anche in queste esperienze, come sempre, erano state controllate (ciò che non solevasi fare nello studio degli Afidini) da allevamenti in capsula di Petri seguiti giorno per giorno; il rigore con cui essi furono condotti è dimostrato già dal fatto che le mute delle *Chermesidae* da tutti ritenute tre vennero dimostrate essere invece in numero di quattro dalla dott. Foà, che con esattezza e pazienza fece e portò a termine questa parte del lavoro.

garten alle superficie W coi raggi di curvatura legati dalla relazione $\frac{r_2}{r_1} = -\frac{1}{p}$, e si vede altresì che l'elemento lineare (10) appartiene alla superficie *complementare* di quella generata dalla evoluta.