ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Fisica tecnica. — *Su la radiazione di un'antenna inclinata.* Nota del Corrispondente Antonio Garbasso.

1. In questi ultimi tempi si è ripreso a discutere sul problema della radiazione emessa da un'antenna inclinata, e si sono enunciate in proposito delle opinioni stranamente discordi.

Non si riesce nemmeno a stabilire se una simile antenna eserciti una maggiore influenza *di fronte* (cioè normalmente al piano verticale che la contiene), oppure di fianco (cioè nel detto piano), a parità di distanza.

Eppure la soluzione del problema è semplice e sicura, e risulta senza ambiguità da un calcolo elementare.

2. Scriviamo le equazioni del campo elettromagnetico, in coordinate cilindriche, sotto la forma

$$(1)\qquad \begin{cases} A\rho\,\dfrac{\partial \mathfrak{M}_\rho}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial(\rho\,\mathfrak{E}_\theta)}{\partial z}\,, \\[2ex] A\,.\,\dfrac{\partial \mathfrak{M}_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial(\mathfrak{E}_\rho)}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \rho}\,, \\[2ex] A\rho\,\dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t} = \dfrac{\partial(\rho\,\mathfrak{E}_\theta)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_\rho}{\partial \theta}\,, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A\rho\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_\rho}{\partial t} = \dfrac{\partial(\rho\,\mathfrak{M}_\theta)}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \theta}\,, \\[2ex] A\,.\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \rho} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}_\rho}{\partial z}\,, \\[2ex] A\rho\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{M}_\rho}{\partial \theta} - \dfrac{\partial(\rho\,\mathfrak{M}_\theta)}{\partial t}\,. \end{cases}$$

Si soddisfa alle (1) e (2) ponendo

$$(3)\qquad \Sigma = \frac{TIl}{2\pi}\left[\frac{2\pi A}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t - Ar) + \frac{\sin\dfrac{2\pi}{T}(t - Ar)}{r}\right]\frac{\rho^2}{r^2}\,,$$

e poi

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_\rho = 0\,, \\ \rho\,\mathfrak{M}_\theta = -A\,\dfrac{\partial \Sigma}{\partial t}\,, \\ \mathfrak{M}_z = 0\,, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho\,\mathfrak{E}_\rho = -\dfrac{\partial \Sigma}{\partial z}\,, \\ \mathfrak{E}_\theta = 0\,, \\ \rho\,\mathfrak{E}_z = \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \rho}\,. \end{cases}$$

La (3) e la seconda delle (4) forniscono

$$\mathfrak{M}_\theta = \frac{I l A}{\varrho}\left[\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar) - \frac{\cos\frac{2\pi}{T}(t - Ar)}{r}\right]\frac{\varrho^2}{r^2},$$

e, se r è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda (T/A),

$$\mathfrak{M}_\theta = -A\,\frac{I l \cos\frac{2\pi t}{T}}{r^2}\cdot\frac{\varrho}{r}.$$

A parole « *il campo è quello di un elemento di corrente, posto all'origine delle coordinate, diretto secondo la direzione positiva dell'asse* z, *con la lunghezza* l *e l'intensità (variabile)*

$$I\cos\frac{2\pi t}{T}\ ».$$

Per grandi valori di r la (3) diventa

$$\Sigma = I l A \cos\frac{2\pi}{T}(t - Ar), \tag{3'}$$

e fornisce

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2\pi}{T}\frac{I l A^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\cos\lambda,\\ \mathfrak{M} &= \frac{2\pi}{T}\frac{I l A^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\cos\lambda,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

ove con λ si indichi la latitudine.

3. Supponiamo adesso che nel piano $\theta = 0$ l'elemento di corrente studiato al § 2 roti, dell'angolo φ, nel verso in cui diminuiscono le λ; si tratta di determinare le forze elettriche e magnetiche prodotte a distanza.

Per questo osserviamo che è secondo le (6)

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2\pi}{T}\frac{I l A^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\sin(r\,,z),\\ \mathfrak{M} &= \frac{2\pi}{T}\frac{I l A^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\sin(r\,,z);\end{aligned}\right. \tag{7}$$

ma $(r\,,z)$ *fisicamente* è l'angolo compreso fra il raggio vettore e la direzione della corrente. Ad $(r\,,z)$ bisogna dunque sostituire il nuovo valore dell'angolo $(r\,,l)$.

Sarà

$$\sin(r, l) = \sqrt{1 - \sin^2\lambda \cos^2\varphi - \cos^2\lambda \cos^2\theta \sin^2\varphi - 2 \sin\lambda \cos\lambda \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi}\,.$$

4. E ora il teorema di Poynting permette di calcolare immediatamente la quantità di energia irradiata attraverso ad una superficie σ qualunque dal nostro aereo, durante una vibrazione completa.

Sarà

$$W = \int_0^T dt \int_\sigma \frac{\mathcal{E}\mathfrak{M} \cos(p, n)}{4\pi A} d\sigma, \tag{8}$$

indicandosi con p la perpendicolare al piano $(\mathcal{E}, \mathfrak{M})$, con n la normale all'elemento $d\sigma$.

Supponiamo, per procedere nel calcolo, che σ appartenga ad una sfera di raggio R; avremo subito

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T}(t - AR)\, dt = \frac{T}{2},$$

e dunque, per le (7) e (8),

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3}{2TR^2} \int_\sigma \sin^2(r, l) . d\sigma \\ &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3}{2T} \iint \sin^2(r, l) . \cos\lambda . d\theta\, d\lambda . \end{aligned} \tag{9}$$

Facciamo variare la λ da $-\alpha$ a $+\alpha$ intendendo che i limiti siano piccolissimi.

Otterremo senz'altro

$$W = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \alpha}{T} \int (1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi)\, d\theta,$$

e integrando adesso rispetto a θ fra i limiti $\theta - \beta$ e $\theta + \beta$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi I^2 l^2 A^3 \alpha\beta}{T} (1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi) \\ &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2} (1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi). \end{aligned} \tag{10}$$

5. Dalla (10) risulta

$$(W)_{\theta=0} = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2} \cos^2\varphi,$$

$$(W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2};$$

e dunque

$$(W)_{\theta=0} = \cos^2\varphi \, . \, (W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \text{ [1]} . \tag{11}$$

« *Un'antenna inclinata emette una maggiore quantità di energia di fronte che di fianco* ». È facile anzi vedere che l'emissione è *massima di fronte* e *minima di fianco*.

Se si desidera il luogo dei punti in cui una superficie assegnata σ, normale alla direzione di propagazione riceve una quantità assegnata di energia, basterà porre

$$\frac{1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi}{\varrho^2} = \text{costante} = a^2 ,$$

o, in coordinate cartesiane,

$$x^2 \cos^2\varphi + y^2 = a^2 (x^2 + y^2)^2 . \tag{12}$$

Ponendo

$$\begin{cases} A = \dfrac{\cos\varphi}{a} , \\[2ex] B = \dfrac{1}{a} , \end{cases}$$

la (12) diventa

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 . \tag{13}$$

La curva (13) è simmetrica rispetto all'origine e rispetto alle direzioni $\theta = 0$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Gli assi hanno rispettivamente per valori 2A e 2B; è sempre

$$A < B .$$

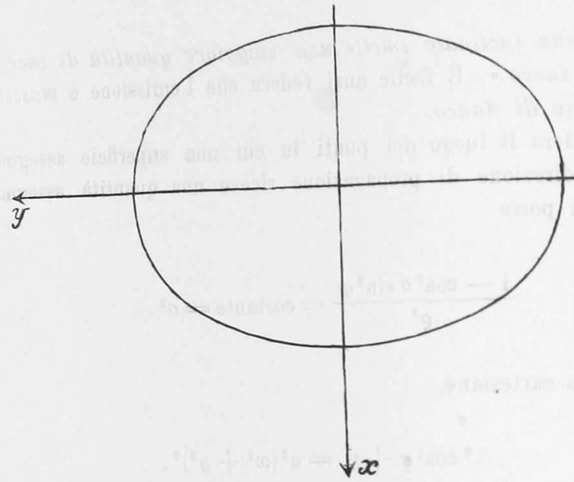
Se, in particolare, l'antenna si inclina a 45° le (11) e (13) dànno

$$(W)_{\theta=0} = \frac{1}{2} (W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} , \tag{11'}$$

$$x^2 + 2y^2 = 2a^2 (x^2 + y)^2 . \tag{13'}$$

[1] Questo resultato si ottiene già senza calcoli, osservando che dell'antenna è utile la sola componente normale alla direzione di propagazione.

La linea (13′), per un valore opportuno della costante, è rappresentata dal diagramma qui appresso, il quale somiglia perfettamente ai diagrammi



ottenuti dall'Artom con un aereo costituito di due antenne inclinate all'orizzonte come quella che ha formato oggetto del nostro calcolo.

Matematica. — *Sulla sviluppabilità in serie degli integrali delle equazioni differenziali lineari*. Nota del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Socio Pincherle.

In questa Nota ci proponiamo di studiare la sviluppabilità di una funzione, che è integrale di una equazione differenziale lineare, in una serie procedente per aggregati lineari di funzioni date, e di calcolare i coefficienti dello sviluppo in funzione dei coefficienti dell'equazione.

1. Sia una equazione differenziale lineare di ordine n

(1) $$\Delta(y) = q$$

ove è

(2) $$\Delta(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = q .$$

Supponiamo che $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ sieno funzioni analitiche della variabile complessa x, reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro un cerchio σ, avente per centro l'origine e per raggio un numero ε maggiore di 1.

Per x reale variabile da 0 ad 1, $p_1(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ saranno quindi funzioni reali finite e continue della variabile reale x.

2. Sieno inoltre

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$