ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

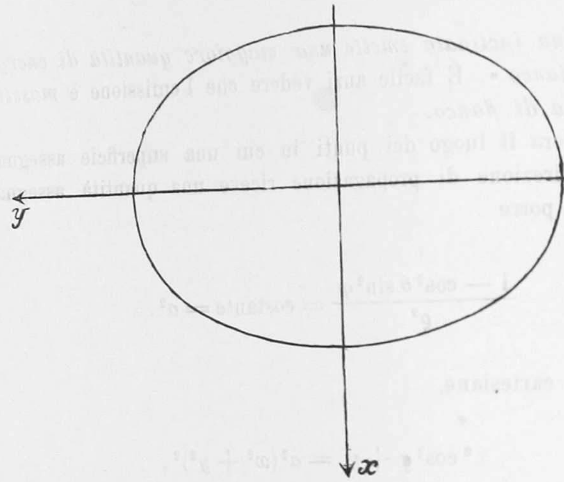
ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

La linea (13′), per un valore opportuno della costante, è rappresentata dal diagramma qui appresso, il quale somiglia perfettamente ai diagrammi



ottenuti dall'Artom con un aereo costituito di due antenne inclinate all'orizzonte come quella che ha formato oggetto del nostro calcolo.

Matematica. — *Sulla sviluppabilità in serie degli integrali delle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Socio PINCHERLE.

In questa Nota ci proponiamo di studiare la sviluppabilità di una funzione, che è integrale di una equazione differenziale lineare, in una serie procedente per aggregati lineari di funzioni date, e di calcolare i coefficienti dello sviluppo in funzione dei coefficienti dell'equazione.

1. Sia una equazione differenziale lineare di ordine n

(1) $$\Delta(y) = q$$

ove è

(2) $$\Delta(y) = y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = q\,.$$

Supponiamo che $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ sieno funzioni analitiche della variabile complessa x, reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro un cerchio σ, avente per centro l'origine e per raggio un numero ε maggiore di 1.

Per x reale variabile da 0 ad 1, $p_1(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ saranno quindi funzioni reali finite e continue della variabile reale x.

2. Sieno inoltre

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

un sistema di funzioni analitiche della variabile complessa x, reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro il cerchio σ sopraddetto. Faremo inoltre le ipotesi seguenti:

I. Le $\varphi_\rho(x)$ e le loro derivate, fino all'ordine $n-1$ compreso, si annullano per $x=0$.

II. Nessuna relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti leghi tra di loro un numero finito delle $\varphi_\rho(x)$.

Poniamo:

$$\psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \psi_\rho(x) \int_0^1 \Delta(\psi_\rho(z))\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz}{\sqrt{\int_0^1 \left\{ \Delta(\varphi_\nu(x)) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \Delta(\psi_\rho(x)) \int_0^1 \Delta(\psi_\rho(z))\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz \right\}^2 dx}} \tag{3}$$

l'operazione Δ essendo definita dalla (2).

Nessuno dei denominatori della (3) può annullarsi. Sia infatti ν il primo indice per cui si abbia

$$\Delta(\varphi_\nu(x)) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \Delta(\psi_\rho(x)) \int_0^1 \Delta(\psi_\rho(z))\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz = 0 .$$

$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_{\nu-1}(x)$ sono funzioni lineari ed omogenee delle $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \dots, \varphi_{\nu-1}(x)$, onde posto

$$\varphi(x) = \varphi_\nu(x) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \psi_\rho(x) \int_0^1 \psi_\rho(z)\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz ,$$

$\varphi(x)$ risulta una funzione lineare ed omogenea delle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$. Ma è

$$\Delta(\varphi(x)) = 0 ,$$

e siccome per $x=0$ si annullano $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$ e le loro derivate, fino all'ordine $n-1$ incluso, si annulla ancora $\varphi(x)$ e le sue prime $n-1$ derivate, e quindi è identicamente

$$\varphi(x) = 0 ,$$

cioè sussiste, contro l'ipotesi, una relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti fra $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$. Non è quindi possibile che si annulli alcuno dei denominatori delle (3): si ha così una formula ricorrente, che definisce, qualunque sia ν, $\psi_\nu(x)$ come funzione lineare omogenea a coefficienti costanti di $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$.

Poniamo:

$$P_\nu(x) = \Delta(\psi_\nu(x)) . \tag{4}$$

Dalle stesse (3) deduciamo subito che $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_\nu(x)$, ... costituiscono un sistema di funzioni normali ed ortogonali:

$$\int_0^1 P_\mu(x)\, P_\nu(x)\, dx = 0 \quad \mu \neq 0 \tag{5}$$
$$= 1 \quad \mu = \nu\,.$$

Alle ipotesi I e II aggiungiamo la III: Le funzioni

$$P_1(x)\,, P_2(x)\,, \ldots, P_\mu(x)\,, \ldots$$

definite dalle (3), (4) costituiscono un sistema *chiuso*, tale cioè che non esiste nessuna funzione finita e continua $\alpha(x)$, per cui si abbia

$$\int_0^1 \alpha(x)\, P_\mu(x)\, dx = 0\,, \qquad \mu = 1\,, 2\,, \ldots$$

a meno che non sia $\alpha(x) \equiv 0$.

Nelle ipotesi I, II, III dimostreremo che la serie

$$\psi(x) = \sum_1^\infty {}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_0^1 q(x)\, P_\mu(x)\, dx \tag{6}$$

converge assolutamente ed uniformemente nell'intervallo 01, *e rappresenta l'integrale della* (1) *che per* $x = 0$ *si annulla insieme alle sue derivate fino all'ordine* $n - 1$.

3. Premettiamo le osservazioni seguenti. Sia $H_1(x)$, $H_2(x)$, ... $H_n(x)$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea

$$\Delta(y) = y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = 0\,, \tag{7}$$

$p_1, p_2, \ldots p_n$ essendo gli stessi coefficienti della (1). Poniamo

$$F(\xi, x) = \frac{\begin{vmatrix} H_1(\xi) & H_2(\xi) & \ldots & H_n(\xi) \\ H_1'(\xi) & H_2'(\xi) & \ldots & H_n'(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_1^{(n-1)}(\xi) & H_2^{(n-1)}(\xi) & \ldots & H_n^{(n-1)}(\xi) \\ H_1(x) & H_2(x) & \ldots & H_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1(\xi) & H_2(\xi) & \ldots & H_n(\xi) \\ H_1'(\xi) & H_2'(\xi) & \ldots & H_n'(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_1^{(n-1)}(\xi) & H_2^{(n-1)}(\xi) & \ldots & H_n^{(n-1)}(\xi) \\ H_1^{(n)}(\xi) & H_2^{(n)}(\xi) & \ldots & H_n^{(n)}(\xi) \end{vmatrix}}\,. \tag{7}$$

Consideriamo il piano complesso della variabile ξ: nell'interno del cerchio σ non cadendo alcuna singolarità dei coefficienti dell'equazione (6), (cfr. n. 1), il denominatore dell'espressione precedente è diverso da zero. Se quindi diamo a ξ valori reali compresi tra 0 ed 1, quel denominatore è una funzione reale e continua, il cui limite inferiore è una quantità m diversa da zero.

Analogamente, ξ essendo reale e compreso fra 0 ed 1, le $H_1(\xi)$, ... $H_n(\xi)$ sono funzioni reali e continue, e ciascuna di esse ha un limite superiore finito, onde è assegnabile un numero reale positivo h, tale, che il valore assoluto di ciascun elemento del determinante che comparisce al numeratore della (7) è minore di h. Per il noto teorema di Hadamard il valore assoluto di quel determinante è inferiore a $h^n \sqrt{n^n}$, onde posto $M = \frac{h^n \sqrt{n^n}}{m}$, abbiamo:

$$|F(\xi, x)| < M$$

ξ, x essendo reali e compresi tra 0 ed 1.

Analogamente si dimostra subito

$$\left|\frac{\partial^r F(\xi, x)}{\partial x^r}\right| < N, \qquad (r = 1, 2, \dots n-1)$$

N essendo un numero assegnabile, ξ e x essendo sempre reali e compresi tra 0 ed 1.

Introduciamo le funzioni $Q_r(\xi, x)$ uguali a $\frac{\partial^r F}{\partial x^r}$ per $\xi \leq x$ ed uguali a zero per $\xi > x$, avremo

$$(8) \qquad \int_0^x \left(\frac{\partial^r F(\xi, x)}{\partial x^r}\right)^2 dx = \int_0^1 (Q_r(\xi, x))^2 \, dx < A^2, \quad r = 0, 1, \dots n-1$$

ove si è posto $\frac{\partial^0 F}{\partial x^0} = F$, ed A è un numero superiore a M e N.

4. Lemma. — Diciamo $\theta(x)$ una funzione reale finita e continua nell'intervallo 0 1, insieme alle sue prime n derivate, che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate. Poniamo

$$\Delta(\theta(x)) = g(x)$$

$$(9) \quad \begin{cases} h(x) = \theta(x) - \int_0^x g(\xi)\, F(\xi, x)\, d\xi = \theta(x) - \int_0^1 g(\xi)\, Q_0(\xi, x)\, d\xi \\ \text{otteniamo derivando} \\ h^{(r)}(x(= \theta^{(r)}(x) - \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^r}{\partial x^r} (F(\xi, x)\, d\xi, \quad r = 1, 2, \dots n-1 \\ h^{(n)}(x) = \theta^{(n)}(x) - g(x) - \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^n}{\partial x^n} (F(\xi, x))\, d\xi. \end{cases}$$

Ma F, considerata come funzione della x, è un integrale dell'equazione omogenea (6), abbiamo quindi tenuto conto della prima delle (9):

$$\Delta(h(x)) = \Delta(\theta(x)) - g(x) = 0 .$$

Per ipotesi, per $x = 0$, si annulla $\theta(x)$ insieme alle sue prime $n-1$ derivate; dalle (9) risulta allora $h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(n-1)}(0) = 0$, onde abbiamo identicamente $h(x) \equiv 0$, e quindi

$$(10)\quad \begin{cases} \theta(x) = \int_0^\infty g(\xi)\, \mathrm{F}(\xi\,, x)\, d\xi = \int_0^1 g(\xi)\, \mathrm{Q}_0(\xi\,, x)\, d\xi \\ \theta^{(r)}(x) = \int_0^\infty g(\xi)\, \frac{\partial^r}{\partial x^r}(\mathrm{F}(\xi\,, x))\, d\xi = \int_0^1 g(\xi)\, \mathrm{Q}_r(\xi\,, x)\, d\xi \\ \qquad\qquad r = 1\,, 2\,, \ldots n-1. \end{cases}$$

Enunciamo quindi il seguente lemma: *Sia $\theta(x)$ una funzione reale arbitraria finita e continua nell'intervallo* 01 *insieme alle sue prime n derivate, che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate; è sempre possibile porre $\theta(x)\,, \theta'(x)\,, \ldots \theta^{(n-1)}(x)$ nella forma* (10), *nella quale è $g(x) = \Delta(\theta(x))$.*

5. *Convergenza delle serie.*

Ciò premesso, consideriamo la serie

$$(11)\qquad \psi(x) = \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_0^1 g(z)\, \mathrm{P}_\mu(z)\, dz .$$

Per il lemma precedente è

$$\psi_\mu(x) = \int_0^1 \mathrm{P}_\mu(\xi)\, \mathrm{Q}_0(\xi\,, x)\, d\xi ,$$

onde, sostituendo, la serie precedente diviene

$$\sum_1^\infty{}_\mu \int_0^1 \mathrm{P}_\mu(\xi)\, \mathrm{Q}_0(\xi\,, x)\, d\xi \int_0^1 g(z)\, \mathrm{P}_\mu(z)\, dz .$$

Essendo, nell'intervallo 01, $\int_0^1 (\mathrm{Q}_0(\xi\,, x))^2\, d\xi < \mathrm{A}^2$, le $\mathrm{P}_1(x)\,, \mathrm{P}_2(x)\,, \ldots$ funzioni normali ortogonali, per un teorema di Schmidt [1], essa converge assolutamente ed uniformemente in tutto l'intervallo 01. Essa quindi rappresenta in questo intervallo una funzione finita e continua $\psi(x)$.

Analogamente, essendo, sempre per il lemma precedente:

$$\psi_\mu^{(r)}(x) = \int_0^1 \mathrm{P}_\mu(\xi)\, \mathrm{Q}_r(\xi\,, x)\, d\xi\,, \qquad r = 1\,, 2\,, \ldots n-1\,,$$

[1] Mat. Ann., 1907.

si dimostra che convergono assolutamente ed uniformemente le serie che si ottengono dalla (11) derivando successivamente $1, 2, \ldots n-1$ volte.

Osserviamo ancora che, le φ_ρ essendo per ipotesi funzioni analitiche uniformi della variabile complessa x, regolari senza eccezione entro il cerchio σ, anche le ψ_ρ che, secondo le (3), sono combinazioni lineari di un numero finito delle φ_ρ, saranno entro lo stesso cerchio σ funzioni analitiche, uniformi della x, regotari senza eccezioni.

La serie (11) essendo convergente uniformemente, per il lemma di Weierstrass, la $\psi(x)$ sarà ancora essa una funzione analitica uniforme e regolare entro σ.

Esistono quindi della $\psi(x)$, entro σ, tutte le derivate fino all'ordine che più piace: secondo le considerazioni precedenti *le prime $n-1$ sono rappresentate dalle serie, che si ottengono dalla* (11) *derivando termine a termine.*

6. *Somma della serie.*

Detto $G(x)$ l'integrale dell'equazione proposta (1), che per $x=0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate, dimostriamo $G(x)$ coincide con la somma della serie (11) $\psi(x)$.

Essendo f, φ due funzioni finite e continue, derivabili n volte abbiamo la formula di integrazione per parti

$$\int_0^1 \varphi\Delta(f)\,dx = \int_0^1 f\Gamma(\varphi)\,dx + \alpha(f,\varphi), \tag{12}$$

ove è

$$\Delta(f) = f^{(n)} + p_1 f^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} f' + p_n f$$

$$\Gamma(\varphi) = p_n\varphi - \frac{d(p_{n-1}\varphi)}{dx} + \frac{d^2(p_{n-2}\varphi)}{dx^2} \cdots + (-1)^n \frac{d^n\varphi}{dx^n}$$

$$\alpha(f,\varphi) = \Big\{ f\Big(p_{n-1}\varphi - \frac{d(p_{n-2}\varphi)}{dx} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\Big) +$$

$$+ f'\Big(p_{n-2}\varphi - \frac{d(p_{n-3}\varphi)}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\Big) + \cdots + f^{(n-1)}\varphi\Big\}_0^1 .$$

Posto quindi:

$$h(x) = G(x) - \psi(x) = G(x) - \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_0^1 q(s)\, P_\mu(s)\, ds\,, \tag{13}$$

per quanto abbiamo visto nel numero precedente, la $h(x)$ è una funzione analitica monodroma e regolare entro il cerchio σ, di cui le prime $n-1$ derivate si ottengono derivando termine a termine la serie a destra. Otteniamo quindi, eseguendo operazioni di calcolo letterale, relative a serie convergenti assolutamente ed uniformemente:

$$\alpha(h, P_\nu) = \alpha(G, P_\nu) - \sum_1^\infty{}_\mu\, \alpha(\psi_\mu, P_\nu)\int_0^1 q(s)\, P_\mu(s)\, ds$$

per tutti i valori all' indice ν. Abbiamo poi dalla (13):

$$\int_0^1 h(x)\, \Gamma(P_\nu(x))\, dx = \int_0^1 G(x)\, \Gamma(P_\nu(x))\, dx - \sum_\mu^{1\ldots\infty} \int_0^1 \psi_\mu(x)\, \Gamma(P_\nu(x))\, dx \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz\,,$$

e, sommando membro a membro le relazioni precedenti, ed applicando la (12):

$$\int_0^1 \Delta(h(x))\, P_\nu(x)\, dx = \int_0^1 \Delta(G(x))\, P_\nu(x)\, dx - \sum_\mu^{1\ldots\infty} \int_0^1 \Delta(\psi_\mu(x))\, P_\nu(x)\, dx \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz$$

per tutti i valori dell' indice ν: e siccome è $\Delta(G) = q$, $\Delta(\varphi_\mu) = P_\mu$, e le $P_1, P_2, \ldots$ sono normali ortogonali, così abbiamo

$$\int_0^1 \Delta(h(x))\, P_\nu(x)\, dx = \int_0^1 q(x)\, P_\nu(x)\, dx - \int_0^1 P_\nu(z)\, q(z)\, dz = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ma il sistema delle P_ν è chiuso per ipotesi, onde risulta $\Delta(h(x)) = 0$. Per $x = 0$, si annullano, insieme alle loro derivate fino all'ordine n 1 incluso, $G(x)$ e tutte le $\varphi_\mu(x)$, quindi $h(x)$; segue che è identicamente $h(x) \equiv 0$, ossia *la serie* (11)

$$\psi(x) = \sum \psi_\mu(x) \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz$$

rappresenta l'integrale della (1), *che per* $x = 0$ *si annulla insieme alle sue prime* $n - 1$ *derivate.*

7. *Integrale generale.*

Mostriamo come dalla serie (11) si possa dedurre l'integrale generale della equazione (1).

Sia $g(x)$ un integrale generico della (1): diciamo $\varphi(x)$ *una funzione finita, continua, deribabile n volte nell'intervallo* 0 1, *soggetta all'unica condizione che, per* $x = 0$, *si abbia*

$$\varphi(0) = g(0)\,,\ \varphi'(0) = g'(0)\ \ldots\ \varphi^{(n-1)}(0) = g^{(n-1)}(0)\,.$$

Posto allora

$$(14) \qquad G(x) = g(x) - \varphi(x)\quad,\quad Q(x) = q(x) - \Delta(\varphi(x)),$$

abbiamo

$$\Delta(G(x)) = Q(x)$$

e quindi, $G(x)$ e le sue prime $n-1$ derivate essendo nulle per $x=0$, abbiamo, applicando il teorema precedente, che $G(x)$ è rappresentato dalla serie (6)

$$G(x)=\sum_{\mu}^{1\dots\infty}\psi_\mu(x)\int_0^1 Q(x)\,P_\mu(x)\,dx\,.$$

Tenendo conto delle (14) abbiamo quindi la formula definitiva che comprende la precedente (11) come caso particolare

$$(15)\qquad G(x)=\varphi(x)-\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\psi_\mu(x)\int_0^1 P_\mu(x)\,\Delta(\varphi(x))\,dx+ \\ +\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\psi_\mu(x)\int_0^1 P_\mu(x)\,q(x)\,dx\,.$$

Essendo $\varphi(x)$ una funzione arbitraria, la (15) *rappresenta l'integrale generale della* (1), *tale che per $x=0$ esso e le sue prime $n-1$ derivate assumono i valori $\varphi(0)\,,\varphi'(0)\,,\dots,\varphi^{(n-1)}(0)$. Le $\psi_\mu(x)$ e le $P_\mu(x)$ sono definite dalle formule* (3), (4).

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine eseguita nella Specola geodetica dell' Università di Genova nel 1908 col metodo delle distanze zenitali in meridiano.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrispondente V. REINA.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Estensione d'una formola di Fresnel ai mezzi cristallini eterogenei.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

1. In un mezzo anisotropo omogeneo si osservano due diverse specie di onde luminose piane, caratterizzate dalle due diverse velocità con le quali si propagano lungo una stessa direzione normale al piano dell'onda.

Queste due velocità sono radici dell'equazione biquadratica di Fresnel

$$(1)\qquad \frac{\lambda^2}{V^2-a^2}+\frac{\mu^2}{V^2-b^2}+\frac{\nu^2}{V^2-c^2}=0\,,$$

essendo $\lambda\,,\mu\,,\nu$ i coseni direttori della normale alla superficie dell'onda