ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

e quindi, $G(x)$ e le sue prime $n-1$ derivate essendo nulle per $x=0$, abbiamo, applicando il teorema precedente, che $G(x)$ è rappresentato dalla serie (6)

$$G(x)=\sum_{\mu}^{1\ldots\infty}\psi_\mu(x)\int_0^1 Q(x)\,P_\mu(x)\,dx\,.$$

Tenendo conto delle (14) abbiamo quindi la formula definitiva che comprende la precedente (11) come caso particolare

$$G(x)=\varphi(x)-\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\psi_\mu(x)\int_0^1 P_\mu(x)\,\Delta(\varphi(x))\,dx+ \\ +\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\psi_\mu(x)\int_0^1 P_\mu(x)\,q(x)\,dx\,. \tag{15}$$

Essendo $\varphi(x)$ *una funzione arbitraria, la* (15) *rappresenta l'integrale generale della* (1), *tale che per* $x=0$ *esso e le sue prime* $n-1$ *derivate assumono i valori* $\varphi(0),\varphi'(0),\ldots,\varphi^{(n-1)}(0)$. *Le* $\psi_\mu(x)$ *e le* $P_\mu(x)$ *sono definite dalle formule* (3), (4).

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine eseguita nella Specola geodetica dell'Università di Genova nel 1908 col metodo delle distanze zenitali in meridiano.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrispondente V. REINA.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Estensione d'una formola di Fresnel ai mezzi cristallini eterogenei.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

1. In un mezzo anisotropo omogeneo si osservano due diverse specie di onde luminose piane, caratterizzate dalle due diverse velocità con le quali si propagano lungo una stessa direzione normale al piano dell'onda.

Queste due velocità sono radici dell'equazione biquadratica di Fresnel

$$\frac{\lambda^2}{V^2-a^2}+\frac{\mu^2}{V^2-b^2}+\frac{\nu^2}{V^2-c^2}=0\,, \tag{1}$$

essendo λ,μ,ν i coseni direttori della normale alla superficie dell'onda piana rispetto agli assi dell'ellissoide di polarizzazione, ed $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ le semi-lunghezze di questi assi.

In questa Nota mi propongo di dimostrare che l'equazione (1) di Fresnel si estende alla superficie frontale di un'onda, la quale si propaghi in un mezzo anisotropo qualunque, qualora si ammetta che le componenti α, β, γ, X, Y, Z dei vettori luminosi di Neumann e di Fresnel restano continue attraverso a tale superficie, mentre qualcuna delle loro derivate (d'ordine finito) rispetto al tempo presenta ivi una discontinuità.

Queste condizioni sono verificate per le onde piane luminose che si propagano nei mezzi anisotropi omogenei, quando le componenti dei vettori di Neumann e di Fresnel secondo gli assi cartesiani sono della forma

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\alpha &= A_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)\\
\beta &= A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)\\
\gamma &= A_3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)\\
X &= B_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)\\
Y &= B_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)\\
Z &= B_3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)
\end{aligned}
$$

(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 sono delle costanti convenienti), e la superficie frontale dell'onda è il piano mobile $t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} = 0$.

2. Indichiamo con x, y, z delle coordinate ortogonali (cartesiane o curvilinee), e con

$$
(3)\qquad ds^2 = \xi^2 dx^2 + \eta^2 dy^2 + \zeta^2 dz^2
$$

il quadrato dell'elemento lineare.

Siano α, β, γ, X, Y, Z le componenti dei vettori di Neumann e Fresnel secondo le normali alle superficie $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$: esse devono soddisfare le equazioni

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
-\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{1}{\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\zeta Z}{\partial y}-\frac{\partial.\eta Y}{\partial z}\right\}\\
-\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{1}{\zeta\xi}\left\{\frac{\partial.\xi X}{\partial z}-\frac{\partial.\zeta Z}{\partial x}\right\}\\
-\frac{\partial\gamma}{\xi t} &= \frac{1}{\xi\eta}\left\{\frac{\partial.\eta Y}{\partial x}-\frac{\partial.\xi X}{\partial y}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\zeta\gamma}{\partial y}-\frac{\partial.\eta\beta}{\partial z}\right\}\\
\varepsilon_{12}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\zeta\xi}\left\{\frac{\partial.\xi\alpha}{\partial z}-\frac{\partial.\zeta\gamma}{\partial x}\right\}\\
\varepsilon_{13}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\xi\eta}\left\{\frac{\partial.\eta\beta}{\partial x}-\frac{\partial.\xi\alpha}{\partial y}\right\}.
\end{aligned}
$$

Nella teoria elettromagnetica della luce α, β, γ, X, Y, Z sono le componenti della forza magnetica ed elettrica; le ε sono funzioni di x, y, z che caratterizzano in ogni punto le proprietà elettriche del mezzo trasparente; la permeabilità magnetica di questo è costante in tutti i punti, e per comodità si pone eguale ad uno.

La condizione che α, β, γ rimangano continue al passaggio dell'onda porta alla conseguenza che l'integrale $\int(\alpha\xi dx + \beta\eta dy + \gamma\zeta dz)$ esteso ad un contorno arbitrario sulla superficie dell'onda rimane continuo attraverso a questa, e, pel teorema di Ampère sulle azioni elettromagnetiche, la corrente di spostamento che accompagna o costituisce la luce nel dielettrico, si chiude entro la superficie dell'onda che la propaga: e questa è l'ipotesi fondamentale della teoria di Maxwell [1].

Nella teoria elastica della luce α, β, γ si possono interpretare come componenti della velocità molecolare, ed $\varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z$. ecc. come componenti della rotazione molecolare, essendo le ε funzioni dei coefficienti di elasticità, che variano da punto a punto. Per la natura stessa di α, β, γ conviene ammettere che siano continue al passaggio dell'onda, mentre le $\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\beta}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}$, essendo delle accelerazioni, saranno generalmente discontinue sulla superficie dell'onda. Se le accelerazioni d'ordine superiore fossero tutte continue su tale superficie fino alla n^{esima}, ma la $(n+1)^{esima}$ fosse discontinua, i calcoli seguenti varrebbero identicamente per quest'ultima.

[1] Si potrebbe considerare il caso che la discontinuità della forza magnetica sia normale alla superficie dell'onda, ma questo esame esorbita dallo scopo delle presente Nota.

Indicando per brevità con $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ i primi membri delle (5), si hanno le due relazioni evidenti

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial . \eta\zeta\alpha}{\partial x}+\frac{\partial . \zeta\xi\beta}{\partial y}+\frac{\partial . \xi\eta\gamma}{\partial z}\right\}=0\,,\\ &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial . \eta\zeta u}{\partial x}+\frac{\partial . \zeta\xi v}{\partial y}+\frac{\partial . \xi\eta w}{\partial z}\right\}=0\,. \end{aligned}$$

La densità dell'energia totale in ogni punto è espressa a meno di un fattore costante da

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\varepsilon_{11}X^2+\varepsilon_{22}Y^2+\varepsilon_{33}Z^2+2\varepsilon_{12}XY+2\varepsilon_{23}YZ+2\varepsilon_{13}ZX\,;$$

ed in ogni punto vi sono tre direzioni principali per cui si ha

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{13}=0\,.$$

Al passaggio della superficie dell'onda la densità dell'energia rimane continua, ma diventa funzione del tempo, cosicchè si ha dell'energia che si propaga.

La superficie frontale dell'onda, ove al tempo t è giunta la luce, è una superficie mobile S, la cui equazione scriveremo

$$(7)\qquad S(t\,,x\,,y\,,z)=0$$

o, risolvendo rispetto al tempo,

$$(7')\qquad t-\psi(x\,,y\,,z)=0\,.$$

Essa si propaga con una velocità, la cui componente secondo la normale ad S è data da

$$(8)\qquad \frac{\partial S}{\partial t}+V\sqrt{\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}=0\,.$$

La superficie S divide lo spazio indefinito in due regioni: nello spazio 1, ove non è ancora giunta la perturbazione luminosa, le $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, X Y , Z sono indipendenti dal tempo, e continuano a soddisfare le (4) e (5) (ammettendo, per la teoria elettromagnetica, che le forze nell'equilibrio dipendano da un potenziale): nello spazio 2 le α..., X... sono funzioni del tempo.

Indichiamo con gli indici 1 e 2 le α..., X... negli spazî 1 e 2; e poniamo per brevità α,β,γ , X, Y, Z invece di $\alpha_2-\alpha_1$, $\beta_2-\beta_1$ ... X_2-X_1,... Le nuove α,β,γ , X, Y, Z sono definite solamente nello spazio 2, e sopra S; nello spazio 2 continuano a soddisfare le (4) e (5), sopra S si annullano, ed ammettono derivate prime non tutte nulle (Si vede facilmente che se le derivate di α, ... X ... sono uniformi e continue nei punti dello spazio 2 sufficientemente vicini ad S, esistono pure le derivate lungo la S medesima).

3. Poniamo

$$\theta = t - \psi(x, y, z), \tag{9}$$

essendo ψ la funzione che figura nella (7'), cosicchè $\theta = 0$ è l'equazione della superficie dell'onda: e formiamo un'equazione differenziale alla quale la ψ debba soddisfare.

Indichiamo con $\overline{\mathrm{F}}$ una funzione del tempo, e di x, y, z quando viene espressa per mezzo di θ, x, y, z come variabili indipendenti, e con F la stessa funzione espressa per mezzo di t, x, y, z.

Si ha

$$\overline{\mathrm{F}}(\theta, x, y, z) = \mathrm{F}(t - \psi(x, y, z), x, y, z)$$

e

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}. \tag{10}$$

Derivando rapporto ad x, y, z si trova immediatamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} &= \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} &= \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{11}$$

Osserviamo che se per $\theta = 0$, cioè sulla superficie dell'onda, è

$$\overline{\mathrm{F}}(\theta, x, y, z) = 0,$$

questo si verifica in tutto lo spazio a tre dimensioni percorso dalla superficie dell'onda, e perciò in tutto questo spazio $\frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial x}, \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial y}, \frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial z}$ devono annullarsi per $\theta = 0$: allora sulla superficie dell'onda si deve avere ad ogni istante $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ecc. Cioè le tre derivate di F rapporto ad x, y, z non possono annullarsi senza che si annulli anche $\frac{\partial \overline{\mathrm{F}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}$; e viceversa se $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}$ sull'onda non è nulla, una almeno delle derivate di F rispetto ad x, y, z dev'essere diversa da zero, salvo che il punto x, y, z sia un punto conico per la $t - \psi(x, y, z) = 0$, nel quale si abbia

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

4. Applichiamo le (10) ed (11) alle (4) e (5). Trasportiamo subito nei primi membri le derivate rapporto a θ, ordinandole rispetto alle lettere

α, β, γ, X, Y, Z; dopo effettuato il calcolo è inutile ritenere il tratto sopra le lettere, e possiamo sopprimerlo, ricordandoci che le derivazioni sono fatte rispetto alle θ, x, y, z come variabili indipendenti.

Si ottiene:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}-\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \theta}+\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \theta}=\frac{1}{\eta \zeta}\left(\frac{\partial \cdot \zeta \mathrm{Z}}{\partial y}-\frac{\partial \cdot \eta \mathrm{Y}}{\partial z}\right) \\
-\frac{\partial \beta}{\partial \theta}+\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta}-\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \theta}=\frac{1}{\zeta \xi}\left(\frac{\partial \cdot \xi \mathrm{X}}{\partial z}-\frac{\partial \cdot \zeta \mathrm{Z}}{\partial x}\right) \\
-\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}-\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta}+\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \theta}=\frac{1}{\xi \eta}\left(\frac{\partial \cdot \eta \mathrm{Y}}{\partial x}-\frac{\partial \cdot \xi \mathrm{X}}{\partial y}\right)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad & -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}+\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}+\varepsilon_{11} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta}+\varepsilon_{12} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \theta}+\varepsilon_{13} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \theta}= \\
& \qquad =\frac{1}{\eta \zeta}\left(\frac{\partial \cdot \zeta \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \cdot \eta \beta}{\partial z}\right) \\
& \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}-\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}+\varepsilon_{12} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta}+\varepsilon_{22} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \theta}+\varepsilon_{23} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \theta}= \\
& \qquad =\frac{1}{\zeta \xi}\left(\frac{\partial \cdot \xi \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \cdot \zeta \gamma}{\partial x}\right) \\
& -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}+\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}+\varepsilon_{13} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta}+\varepsilon_{23} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \theta}+\varepsilon_{33} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \theta}= \\
& \qquad =\frac{1}{\xi \eta}\left(\frac{\partial \cdot \eta \beta}{\partial x}-\frac{\partial \cdot \xi \alpha}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

Per quello che s'è già visto più sopra, facendo $\theta=0$ i secondi membri delle (12) sono nulli in tutto lo spazio a tre dimensioni percorso dalla superficie dell'onda. Affinchè le derivate di α, β, γ, X, Y, Z rapporto a θ non siano identicamente nulle per $\theta=0$ è necessario che si annulli il determinante dei coefficienti di queste derivate, ed è sufficiente che non siano nulli contemporaneamente tutti i suddeterminanti d'una stessa orizzontale. Si ha perciò l'equazione differenziale della superficie dell'onda

$$
(13) \qquad \left|\begin{array}{cccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
0 & -1 & 0 & \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} & 0 \\
0 & -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\
\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\
\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} & 0 & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}
\end{array}\right|=0 .
$$

La regola di Laplace per le due matrici di tre orizzontali mostra che i termini di sesto grado nello sviluppo del determinante si elidono, e l'equazione (13) è di quarto grado nelle derivate parziali.

Il determinante (14) si riduce facilmente alla forma

$$(13') \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 & \varepsilon_{12} + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \varepsilon_{13} + \frac{1}{\xi\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \varepsilon_{12} + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \varepsilon_{22} - \left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 & \varepsilon_{23} + \frac{1}{\eta\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \varepsilon_{13} + \frac{1}{\xi\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} & \varepsilon_{23} + \frac{1}{\eta\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} & \varepsilon_{33} - \left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora ponendo $S(t, x, y, z) = t - \psi(x, y, z) = 0$ nella (8) si ricava

$$V = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}}$$

e d'altra parte si ha, a meno del segno $\pm$,

$$\lambda = \frac{V}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \mu = \frac{V}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \nu = \frac{V}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \text{con} \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Sostituendo questi valori nella (13') e moltiplicando per V^6 si ottiene

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}V^2 + \lambda^2 - 1 & \varepsilon_{12}V^2 + \lambda\mu & \varepsilon_{13}V^2 + \lambda\nu \\ \varepsilon_{12}V^2 + \lambda\mu & \varepsilon_{22}V^2 + \mu^2 - 1 & \varepsilon_{23}V^2 + \mu\nu \\ \varepsilon_{13}V^2 + \lambda\nu & \varepsilon_{23}V^2 + \mu\nu & \varepsilon_{33}V^2 + \nu^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione bicubica in V si spezza nel prodotto di V^2 per una equazione biquadratica; è più generale che quella di Fresnel, e si applica a mezzi anisotropi qualsiasi; si riduce alla (1) quando in tutti i punti del mezzo rifrangente le *direzioni principali* di polarizzazione dielettrica o di elasticità coincidono con le normali alle superficie ortogonali

$$x = \text{cost} \quad , \quad y = \text{cost} \quad , \quad z = \text{cost}.$$

In questo caso $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{13} = 0$; l'equazione (14) divisa per

$$V^2(\varepsilon_{11}V^2 - 1)(\varepsilon_{22}V^2 - 1)(\varepsilon_{33}V^2 - 1)$$

diviene

$$1 + \frac{\lambda^2}{\varepsilon_{11}V^2 - 1} + \frac{\mu^2}{\varepsilon_{22}V^2 - 1} + \frac{\nu^2}{\varepsilon_{33}V^2 - 1} = 0$$

che coincide con la (1) di Fresnel, quando si ponga

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{a^2}\,,\quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{b^2}\,,\quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{c^2}$$

e si facciano le ovvie riduzioni.

5. La discontinuità dei vettori $\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \beta}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ giace nel piano tangente alla superficie dell'onda.

Infatti in ambedue le teorie della luce i vettori $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ devono soddisfare non soltanto le (6), ma anche le due relazioni

$$\frac{1}{\xi\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\eta\zeta\alpha}{\partial x} + \frac{\partial.\zeta\xi\beta}{\partial y} + \frac{\partial.\xi\eta\gamma}{\partial z}\right\} = 0$$

$$\frac{1}{\xi\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\eta\zeta X}{\partial x} + \frac{\partial.\zeta\xi Y}{\partial y} + \frac{\partial.\xi\eta Z}{\partial z}\right\} = 0\,.$$

Applichiamo a queste due equazioni le (11) tenendo conto che per $\theta = 0$ le $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ sono nulle in tutto lo spazio 2: otteniamo

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial\theta} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = 0\,,$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial\theta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial\theta} = 0\,.$$

Queste due relazioni esprimono appunto la proprietà enunciata pei due vettori, e significano che l'onda è trasversale.

6. Tornando alle equazioni (7) e (8) poniamo per brevità

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p_0\,,\quad \frac{\partial S}{\partial x} = p_1\,,\quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_2\,,\quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_3$$

e facciamo la sostituzione in (14): si ottiene così la più generale equazione differenziale per la superficie dell'onda sotto la forma

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 & \varepsilon_{12}p_0^2 + p_1p_2 & \varepsilon_{13}p_0^2 + p_1p_3 \\ \varepsilon_{12}p_0^2 + p_1p_2 & \varepsilon_{22}p_0^2 - p_3^2 - p_1^2 & \varepsilon_{23}p_0^2 + p_2p_3 \\ \varepsilon_{13}p_0^2 + p_1p_3 & \varepsilon_{23}p_0^2 + p_2p_3 & \varepsilon_{33}p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Com'è ben noto, la $S(t, x, y, z) = 0$ è determinata da questa equazione differenziale quando si imponga la condizione che per $t = 0$ determinata si riduca ad una data superficie S_0.

In un'altra Nota esporrò le soluzioni che si ottengono in alcuni casi molto semplici, nei quali si può facilmente trovare un integrale completo della (15).

Intanto voglio rilevare il fatto che risulta dalle equazioni (14) o (15); che in un mezzo cristallino eterogeneo una data sorgente luminosa S_0 emette due sole specie di onde, le quali sono caratterizzate dalle due diverse velocità (positive) di propagazione secondo la normale.