# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

infinito di dimensioni la quadrica irriducibile $Q_\infty$ di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma a_{rs} \xi_r \xi_s = 0$, ed in coordinate di piani è

$$\frac{1}{A_\infty} \Sigma A_{rs}^{(\infty)} \eta_r \eta_s = 0 .$$

In quello spazio la funzione $g(y)$ è rappresentata da un iperpiano $\mathcal{A}$ ad infinite dimensioni, precisamente dall'iperpiano le cui coordinate sono $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$

Segando la quadrica Q e l'iperpiano $\mathcal{A}$ coll'iperpiano coordinato ad $r$ dimensioni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ otteniamo per sezione la quadrica $Q_r$ e l'iperpiano ad $r-1$ dimensioni $\mathcal{A}_r$.

La condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) sia risolubile è che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo $Q_r$, sostituitevi le coordinate del piano $\mathcal{A}_r$, conservi, al crescere di $m$, un valore determinato e finito: brevemente che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q, sostituitevi le coordinate dell'iperpiano $\mathcal{A}$ abbia un valore determinato e finito.

Analogo, ma più complicato nella esposizione, è il caso in cui le $u_1, u_2, \dots$ non sono linearmente indipendenti.

8. Osserviamo finalmente che la trattazione precedente si estende senza incontrare difficoltà essenziali, alla equazione

$$g(\eta_1 \dots \eta_n) = \int_\sigma f(\xi_1 \dots \xi_m)\, V(\xi_1 \dots \xi_m | \eta_1 \dots \eta_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_m ,$$

$\xi_1 \dots \xi_m$ variando entro un campo $\sigma$ ad $m$ dimensioni, $\eta_1 \dots \eta_n$ entro un campo $\tau$ ad $n$ dimensioni.

## Meccanica. — *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio Levi-Civita.

In questa Nota stabilisco una proprietà, che mostra la dipendenza dei problemi di moto stazionario lento dei liquidi viscosi, da problemi di equilibrio elastico: precisamente, faccio vedere che la determinazione della velocità delle particelle liquide nel moto stazionario lento di un liquido viscoso, che occupa lo spazio S interno od esterno ad una superficie chiusa $\sigma$, nell'ipotesi che nei punti di $\sigma$ si conosca la velocità delle particelle stesse, si effettua immediatamente allorchè sia determinata la deformazione del solido S, riguardato come elastico ed isotropo, nel caso in cui si conosca lo spostamento subìto dai punti del contorno $\sigma$. Basta infatti dare un valore particolare alla costante di elasticità.

Poichè il problema elastico si sa ormai risolvere per campi molto generali, si conclude che per tali campi sarà senz'altro risolto anche il problema idrodinamico enunciato. Quest'ultimo problema, limitato però al solo campo interno a $\sigma$, è pure stato risolto recentemente da A. Korn (1), con procedimento diretto, analogo a quello che egli stesso aveva impiegato precedentemente per l'integrazione della doppia equazione di Laplace. La proprietà che io dimostro qui, elimina quindi questi nuovi calcoli, bastando, allo scopo, le formole del problema elastico.

Per maggior chiarezza richiamo dapprima (n. 1) un procedimento, assai semplice, dovuto al prof. Marcolongo (2) col quale, da soluzioni particolari, note già da molto tempo, delle equazioni indefinite dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, si deduce un sistema di tre equazioni integrali, che permette di risolvere il problema dell'equilibrio elastico per dati spostamenti superficiali.

In questo lavoro mi valgo della recente teoria delle omografie vettoriali (3), che rende i calcoli e la esposizione più agile, breve e nitida; in conseguenza, essendo del tutto eliminate le coordinate, invece di un sistema di tre equazioni integrali, si trova una sola equazione integrale di seconda specie, il cui nucleo è un'omografia vettoriale. A tale equazione si possono, del resto, applicare le note proprietà delle ordinarie equazioni integrali. Dalle formole che ottengo per il problema elastico, seguono immediatamente (n. 2) quelle che dimostrano la proprietà enunciata.

1. *Equazioni del problema elastico.* — Sia S un solido elastico isotropo, limitato da una superficie $\sigma$. Se diciamo $\mathbf{s}$ il vettore (infinitesimo) che rappresenta lo spostamento subìto da un punto qualunque del solido, in una sua deformazione, la condizione di equilibrio elastico di S, nell'assenza di forze esterne, è rappresentata dall'equazione (*O. v.*, pag. 76):

$$\Delta' \mathbf{s} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} = 0\,, \tag{1}$$

ove $k$ è una costante.

Orbene, è facile vedere che, se si introduce il parametro:

$$\lambda = \frac{k}{k+2}\,,$$

(1) Korn, *Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXV, 1° semestre 1908.

(2) Marcolongo, *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica,* Rendiconti di questa Accademia, serie 5ª, vol. XVI, 1° semestre 1907.

(3) Tale teoria trovasi egregiamente sviluppata, con varie interessanti applicazioni, nel recentissimo volumetto *Omografie vettoriali*, ecc. (G. B. Petrini, Torino, 1909), dei proff. Burali-Forti e Marcolongo. Nelle citazioni, indicherò questo libro con (*O. v.*).

e si indica con $\mathbf{a}$ un vettore costante, si soddisfa alla (1) assumendo:

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda\frac{dr^2}{dn}\,\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r}\ \text{(1)}, \tag{2}$$

ove $r$ è la distanza di un punto qualunque P dello spazio, da un punto M di $\sigma$, e $\frac{d}{dn}$ indica la solita derivata normale interna che, per una funzione qualunque $f$, può esprimersi sotto forma assoluta così (*O. v.*, nota pag. 52):

$$\frac{df}{dn} = \frac{df}{d\mathrm{M}}\mathbf{N},$$

$\mathbf{N}$ essendo un vettore unitario, parallelo alla normale a $\sigma$ e diretto all'interno di S.

Infatti si ha dalla (2), applicando una nota formola (*O. v.*, pag. 62, [7]):

$$\Delta'_P\,\mathbf{s} = -2\lambda\left(\frac{d}{d\mathrm{P}}\,\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r}\right)\mathrm{grad}_P\,\frac{dr^2}{dn};$$

e poichè:

$$\mathrm{grad}_P\,\frac{dr^2}{dn} = 2\,\frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{M})}{dn} = -2\mathbf{N},$$

si conclude:

$$\Delta'_P\,\mathbf{s} = -4\lambda\left(\frac{d}{d\mathrm{M}}\,\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r}\right)\mathbf{N} = -4\lambda\,\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right). \tag{3}$$

Dalla (2) si trae ancora, mediante un'altra formola (*O. v.*, pag. 57, [8]):

$$\mathrm{div}_P\,\mathbf{s} = 2\,\mathrm{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) - \lambda\left(\mathrm{grad}_P\,\frac{dr^2}{dn}\right)\times\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r},$$

e poichè l'ultimo termine vale:

$$2\lambda\mathbf{N}\times\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r} = -2\lambda\mathbf{N}\times\mathrm{grad}_M\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r},$$

risulta:

$$\mathrm{div}_P\,\mathbf{s} = 2\,\mathrm{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) - 2\lambda\frac{d}{dn}\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r},$$

(1) Si è messo l'indice P alle operazioni grad e div per indicare che negli enti su cui esse operano, s'intende che P è la variabile indipendente.

e perciò:

$$\mathrm{div}_P\,\mathbf{s} = 2(1-\lambda)\,\mathrm{div}_P\left(\mathbf{a}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right). \tag{4}$$

Dalle (3), (4), e dall'espressione di $\lambda$, segue senz'altro la (1); c. d. d.

Se $u$ è un numero funzione di P, si ha:

$$\mathrm{grad\,div}\,(u\mathbf{a}) = \frac{d\,\mathrm{grad}\,u}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}\,;$$

infatti il primo membro vale $\mathrm{grad}\,(\mathbf{a}\times\mathrm{grad}\,u)$ e trasformando mediante due note formole (*O. v.*, pag. 51, [5], e pag. 54, [15]), si ottiene il secondo membro.

Si conclude quindi, che la (2) può ancora scriversi:

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{a}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda\,\frac{dr^2}{dn}\,\frac{d\,\mathrm{grad}_P\frac{1}{r}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}\,. \tag{2'}$$

Se si indica con $\mathbf{s}_0$ un vettore funzione finita e continua dei punti M di $\sigma$, è chiaro che l'espressione:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathbf{s}_0\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi}\int_\sigma \frac{dr^2}{dn}\,\frac{d\,\mathrm{grad}_P\frac{1}{r}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{s}_0\,d\sigma \tag{5}$$

è ancora una soluzione della (1).

Supponiamo ora che il punto P appartenga allo spazio S, e che muovendosi in S tenda verso un punto Q del contorno. È noto dalle proprietà della funzione potenziale di strato semplice, che, per condizioni molto generali relative al contorno $\sigma$, si ha dalla (5), al limite:

$$\mathbf{s}(\mathrm{Q}) = \mathbf{s}_0(\mathrm{Q}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathbf{s}_0(\mathrm{M})\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi}\int_\sigma \frac{dr^2}{dn}\,\frac{d\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r}}{d\mathrm{Q}}\,\mathbf{s}_0(\mathrm{M})\,d\sigma \tag{6}$$ (¹),

(¹) Se $u, v, w$ sono le coordinate di $\mathbf{s}$ rispetto ad una terna di assi ortogonali, $u_0, v_0, w_0$ sono le coordinate di $\mathbf{s}_0$, ed $x, y, z$ quelle di Q, si deduce dalla (6):

$$u(\mathrm{Q}) = u_0(\mathrm{Q}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_0(\mathrm{M})\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma -$$
$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int_\sigma \frac{dr^2}{dn}\left[\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\,u_0(\mathrm{M}) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\,v_0(\mathrm{M}) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\,w_0(\mathrm{M})\right]d\sigma,$$

e due analoghe per $v(\mathrm{Q}), w(\mathrm{Q})$. Questo sistema di equazioni integrali è stato dato la prima volta dal Fredholm, che lo ottenne con metodo del tutto diverso.

che può scriversi:

$$(6') \qquad \mathbf{s}(Q) = \mathbf{s}_0(Q) + \int_\sigma \alpha(Q, M)\, \mathbf{s}_0(M)\, d\sigma ,$$

ove $\alpha(Q, M)$ indica l'omografia vettoriale (funzione dei punti Q, M), che è più particolarmente una « dilatazione »:

$$\alpha(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}}{dQ},$$

la quale, dopo qualche trasformazione, può ancora scriversi:

$$\alpha(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} [1 + 2\lambda + 3\lambda(\mathrm{grad}_Q\, r \wedge)^2] .$$

Se ora, nel problema elastico, supponiamo noti gli spostamenti superficiali, nella (6') sarà noto $\mathbf{s}$, e si tratterà di cercare $\mathbf{s}_0$; la (6') è allora un'equazione integrale di seconda specie, il cui nucleo $\alpha(Q, M)$, col tendere di M a Q diventa infinito soltanto come $\frac{1}{r}$. Essa quindi può risolversi col noto metodo del Fredholm. Dopo aver così determinato $\mathbf{s}_0$, la (5) fornirà $\mathbf{s}$.

Lo stesso procedimento è applicabile alla risoluzione del problema elastico esterno (1).

2. *Equazioni del problema idrodinamico.* — Consideriamo un liquido viscoso, che occupi lo spazio S racchiuso da una superficie $\sigma$. Se diciamo $\mathbf{v}$ il vettore che rappresenta la velocità di una particella qualunque P di liquido, e $p$ l'intensità della pressione, le equazioni del moto stazionario lento del liquido, nell' ipotesi che le forze di massa derivino da un potenziale U (2), sono:

$$(7) \qquad \Delta' \mathbf{v} = \mathrm{grad}\, p_1 ,$$

$$(8) \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 ,$$

ove $p_1 = (p - U)/h$, $h$ essendo una costante.

(1) Cfr. Marcolongo, Nota citata.

(2) Si potrebbe addirittura supporre $U = 0$, giacchè il caso dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa sono nulle. Cfr. a questo proposito la mia Nota: *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso*, n. 2, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, in corso di stampa.

Orbene, se $\mathbf{a}$ è un vettore costante, e si conservano le notazioni precedenti, si soddisfa alle (7), (8) assumendo:

$$(9)\qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{a}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dr^2}{dn}\,\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r}\,,$$

$$(10)\qquad p_1 = -4\,\mathrm{div}_P\left(\mathbf{a}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right).$$

Infatti, la (9) si ottiene dalla (2) per $\lambda = 1$; perciò dalle (3), (10) segue evidentemente la (7), e dalla (4) la (8); c. d. d.

Se $\mathbf{v}_0$ è un vettore funzione finita e continua dei punti M di $\sigma$, è chiaro che le espressioni

$$(11)\qquad \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathbf{v}_0\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{dr^2}{dn}\,\frac{d\,\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}}{dP}\,\mathbf{v}_0\,d\sigma\,,$$

$$(12)\qquad p_1 = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{div}_P\int_\sigma \mathbf{v}_0\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,,$$

soddisfano pure alle (7), (8) (¹).

La (11) è un caso particolare della (5), perchè si deduce dalla (5) per $\lambda = 1$, perciò si conclude pure che sussiste per $\mathbf{v}$ ancora la (6) ove $\lambda = 1$, quindi *la soluzione* $\mathbf{v}$ *delle* (7), (8) *che nei punti* Q *di* $\sigma$ *coincide con un vettore dato* $\mathbf{v}(Q)$ (²), *si deduce dalla soluzione* $\mathbf{s}$ *del problema dell'equilibrio elastico per dati spostamenti superficiali, ponendo in essa* $\lambda = 1$ (³). Tale valore di $\lambda$ non è, com'è noto, un autovalore per la (6).

Essendo così determinato $\mathbf{v}$, si potrà ricavare $p_1$ dalla (7), perchè è verificata la condizione d'integrabilità espressa da $\mathrm{rot}\,\Delta'\mathbf{v} = 0$; ovvero, dopo aver ricavato $\mathbf{v}_0(Q)$ dalla (6) per $\lambda = 1$, si otterrà poi $p_1$ dalla (12). Più semplicemente ancora, basterà applicare la formola:

$$p_1 = -\lim_{k=\infty}(k\,\mathrm{div}\,\mathbf{s})\,,$$

che si desume dal confronto delle (7), (8), (1).

(¹) Ciò si desume anche dalle ultime due formole della mia Nota citata.

(²) Trattandosi di un campo finito S, il vettore $\mathbf{v}(Q)$ deve soddisfare alla condizione seguente, che si ricava dalla (8), mediante il teorema della divergenza:

$$\int_\sigma \mathbf{v} \times \mathbf{N}\,d\sigma = 0\,.$$

Invece per il problema esterno, questa condizione non occorre.

(³) Una verifica di questa proprietà si ha, nel caso della sfera, dalle formole stabilite nella mia Nota citata.

La stessa proprietà vale per il problema idrodinamico esterno.

Giova notare che — come mi fa gentilmente osservare il prof. Levi-Civita — se non si tenesse conto di condizioni ai limiti, si riconoscerebbe immediatamente che l'integrazione delle equazioni indefinite (7), (8) può farsi dipendere dall'integrazione dell'equazione indefinita (1). Basta infatti, per ogni integrale $\mathbf{s}$ della (1), introdurre una funzione $\varphi$ tale che $\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{s}$, allora ponendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} - \operatorname{grad} \varphi \quad , \quad p_1 = -(k+1)\,\Delta\varphi \,,$$

le (7), (8) risultano soddisfatte.

Osservazione. — Anche la soluzione della doppia equazione di Laplace, che assume, colla sua derivata normale, dati valori al contorno, si può ottenere come caso particolare del problema elastico considerato nel n. 1: basta precisamente porre $\lambda = -1$, ovvero $k = -1$, come ho mostrato già una decina d'anni addietro (1); in tal caso bisogna però aggiungere alla (1) la condizione $\Delta \operatorname{div} \mathbf{s} = 0$, che per $k \neq -1$ è conseguenza della (1). Infatti, ponendo $\mathbf{s} = \operatorname{grad} u$, ove $u$ è una funzione da determinarsi, si ha $\operatorname{div} \mathbf{s} = \Delta u$, onde si conclude che $u$ soddisfa alla doppia equazione di Laplace $\Delta\Delta u = 0$. Conoscendo poi $\mathbf{s}$ per i punti del contorno, risulterà nota (a meno di una costante) la $u$ nei punti del contorno stesso, e poi anche la derivata normale di $u$, che vale $\mathbf{N} \times \mathbf{s}$.

## Meccanica — *Sopra le correnti liquide spontanee* (2). Nota di Umberto Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

Nella Nota precedente ho dato un esempio di effettiva esistenza di correnti liquide spontanee, immaginando che il moto liquido piano avvenga in una corona circolare e sia simmetrico rispetto al centro.

Nella presente Nota mi propongo di mostrare che l'esempio addotto rappresenta *l'unica soluzione* possibile che corrisponda ad una corrente spontanea *irrotazionale*, che si svolge in un campo anulare (del tipo « corona circolare » dal punto di vista della connessione).

1. Nel caso *irrotazionale* il problema è condotto alla ricerca di due linee libere $\lambda$ e $\mu$, e di una funzione $\Psi(x, y)$ (funzione di corrente), armonica nello spazio A compreso tra $\lambda$ e $\mu$ (vedi la figura della Nota I), e tale che sia $\Psi = 0$ sopra $\lambda$ e $\Psi = q$ sopra $\mu$, e di più che il $\Delta_1 \Psi$

(1) Boggio, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*, n. 8, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV, 1899-1900. In questa Nota ho considerato solo il caso del piano, ma quelle considerazioni sono valide anche per lo spazio.

(2) Cfr. questi Rendiconti Nota I, pag. 10.