ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1910.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie rigate applicabili sul catenoide.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. La classe completa delle superficie rigate applicabili sul catenoide è formata, come ben si sa, dalle superficie luogo delle binormali delle curve a torsione costante.

Una semplice proprietà geometrica che caratterizza queste rigate è data, come mi propongo qui di dimostrare, dal seguente teorema:

Sopra due qualunque asintotiche curvilinee di queste rigate è costante l'angolo che formano le coppie di piani osculatori alle due asintotiche in punti situati sopra una medesima generatrice; e viceversa se una rigata gode di tale proprietà, per tutte le coppie di asintotiche curvilinee, essa è applicabile sul catenoide.

Sia R una qualunque rigata, γ la sua linea di stringimento; indichiamo con v l'arco di γ contato da un punto fisso, con u la lunghezza di generatrice a partire da γ (dal punto centrale), e sia $\theta = \theta(v)$ l'angolo d'inclinazione della generatrice sopra γ. Per l'elemento lineare di R avremo

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + (M^2 u^2 + 1)\, dv^2, \tag{1}$$

dove anche M sarà funzione della sola v (cfr. le mie *Lezioni di geometria* *differenziale*, t. I, Cap. VIII). La curvatura K della rigata R è data da

$$K = -\frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^2},$$

onde pei coefficienti D, D′ della seconda forma fondamentale risulta

$$D = 0 \quad , \quad D' = \frac{M \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Per il terzo coefficiente D″ vale poi la formola di Codazzi

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} D'' + \frac{\partial D'}{\partial v} + \left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right] D',$$

che sostituendo i valori effettivi dei simboli di Christoffel per la (1)

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\frac{M^2u\cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{M^2u}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta},$$

$$\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{MM'u^2 + M^2u\cos\theta + \theta' \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta},$$

diventa

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{M^2u}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta} D'' + \\ + \frac{M^2(M\cos\theta\,.\,\theta' - M'\operatorname{sen}\theta)(u^2 - \operatorname{sen}^2\theta) - 2M^3u\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

dove gli accenti indicano derivazioni rapporto a v.

Integrando l'equazione superiore, lineare in D″, si trova subito

$$D'' = \sqrt{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\left\{\Phi(v) + \frac{(M'\operatorname{sen}\theta - M\cos\theta\,.\,\theta')u + M\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\right\}, \tag{2}$$

dove $\Phi(v)$ è una funzione arbitraria di v, che fissa la forma della rigata R di elemento lineare (1) che si considera. Con questo valore (2) di D″ l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee di R

$$2D'du + D''dv = 0$$

si scrive

$$2M\operatorname{sen}\theta\frac{du}{dv} + \Phi(v)(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta) + \\ + (M'\operatorname{sen}\theta - M\cos\theta\,.\,\theta')u + M\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0. \tag{3}$$

Per la nostra ricerca, in luogo della funzione incognita u di v, conviene introdurre l'angolo Ω che il piano tangente, in un punto qualunque

(u, v) della rigata, forma col piano tangente nel punto centrale $(0, v)$, ciò che si fa colla formola di Chasles

$$\operatorname{tang} \Omega = \frac{M u}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Di qui si ha

$$u = \frac{\operatorname{sen} \theta}{M} \operatorname{tang} \Omega$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{M \cos \theta . \theta' - M' \operatorname{sen} \theta}{M^2} \operatorname{tang} \Omega + \frac{\operatorname{sen} \theta}{M} \frac{1}{\cos^2 \Omega} \frac{d\Omega}{dv},$$

e sostituendo nella (3) e moltiplicando per $\cos^2 \Omega$, si ha l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee sotto la forma cercata:

$$(4) \quad 2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\Omega}{dv} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{M} (M \cos \theta . \theta' - M' \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega + \\ + \Phi(v) \operatorname{sen}^2 \theta + M \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos^2 \Omega = 0.$$

Ora, affinchè la rigata R goda della proprietà enunciata nel teorema, occorre e basta che, detta Ω_1 una soluzione particolare della (4), la soluzione generale sia

$$\Omega = \Omega_1 + \text{cost},$$

per la qual cosa i coefficienti della equazione differenziale (4) non dovranno contenere Ω. Le condizioni necessarie e sufficienti si traducono dunque nelle due relazioni

$$M \cos \theta . \theta' - M' \operatorname{sen} \theta = 0 \quad , \quad M \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0,$$

e queste, escludendo il caso delle sviluppabili, danno

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad M = \text{cost},$$

valori che caratterizzano appunto le superficie delle binormali delle curve a torsione costante $\frac{1}{M}$.

Il teorema è così dimostrato.

2. Alla proprietà riconosciuta caratteristica per le deformate rigate del catenoide si può dare una nuova forma, ricorrendo alla teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie.

Per questo considererò qui una classe di deformazioni infinitesime delle superficie rigate in generale, a cui già ho accennato a pag. 53 del vol. II delle *Lezioni*, e ricercherò la più generale deformazione infinitesima di una rigata R nella quale gli spostamenti dei singoli punti avvengono normalmente alle generatrici.

Riferiamo la rigata R alle sue generatrici (v) ed alle trajettorie ortogonali (u), e sia

$$ds^2 = du^2 + \{(u-\alpha)^2 + \beta^2\} \, dv^2 \tag{5}$$

il quadrato dell'elemento lineare di R, dove α, β sono funzioni della sola v. Pei coefficienti D, D', D'', posto

$$G = (u-\alpha)^2 + \beta^2,$$

abbiamo

$$D = 0 \quad , \quad D' = \frac{\beta}{\sqrt{G}}, \tag{6}$$

mentre la seconda equazione di Codazzi dà

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) = \frac{\partial}{dv}\left(\frac{\beta}{G}\right). \tag{7}$$

In ogni punto della rigata introduciamo il triedro trirettangolo formato dalla direzione (X_1, Y_1, Z_1) della generatrice, da quella (X_2, Y_2, Z_2) della tangente alla linea (u) e dalla normale (X_3, Y_3, Z_3) alla superficie; sussistono allora le formole (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 90)

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = X_1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2 ,$$

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = 0 \ , \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\beta}{G} X_3 \ , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{\beta}{G} X_2 , \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{u-\alpha}{\sqrt{G}} X_2 + \frac{\beta}{\sqrt{G}} X_3 \ , \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{u-\alpha}{\sqrt{G}} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3 , \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{\beta}{\sqrt{G}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2 , \ \text{ecc.} \end{aligned} \right.$$

Ora, si consideri in ogni punto (u, v) di R una direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ normale alla generatrice ed inclinata dell'angolo $\sigma = \sigma(u, v)$ sulla superficie, sicchè avremo

$$\overline{X} = \cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3 , \tag{8}$$

e derivando rapporto ad u, v coll'osservare le (β)

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \overline{X}}{\partial u} &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\beta}{G}\right)(-\operatorname{sen}\sigma\, X_2 + \cos\sigma\, X_3) \\ \frac{\partial \overline{X}}{\partial u} &= -\left(\cos\sigma \frac{u-\alpha}{\sqrt{G}} + \operatorname{sen}\sigma \frac{\beta}{\sqrt{G}}\right) X_1 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{D''}{\sqrt{G}}\right)(-\operatorname{sen}\sigma\, X_2 + \cos\sigma\, X_3) . \end{aligned} \right.$$

Cerchiamo ora come dobbiamo prendere la funzione incognita $\sigma(u, v)$, affinchè esista una deformazione infinitesima di R nella quale gli spostamenti dei singoli punti (u, v) avvengano nella direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$. Le componenti dello spostamento saranno

$$\bar{x} = \varrho \overline{X} \;,\; \bar{y} = \varrho \overline{Y} \;,\; \bar{z} = \varrho \overline{Z} \;,$$

ove ϱ è l'ampiezza. Scrivendo le tre condizioni caratteristiche per le deformazioni infinitesime (*Lezioni*, vol. II, pag. 4)

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0 \;,\; \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0 \;,\; \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) = 0 \,,$$

coll'osservare le (α) e le (9), si vede che la prima di esse è un'identità e le altre due dànno

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log(\varrho \cos\sigma)}{\partial u} &= 2\,\frac{\beta}{G}\operatorname{tang}\sigma + \frac{u-\alpha}{G} \,, \\ \frac{\partial \log(\varrho \cos\sigma)}{\partial v} &= \frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{tang}\sigma \,. \end{aligned} \right.$$

Basta dunque che σ soddisfi alla condizione d'integrabilità per le (10), che servendosi della equazione (7) di Codazzi diventa

$$(11) \qquad \frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{2\beta}{G}\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right) + \cos^2\sigma\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{G}\right).$$

Ad ogni soluzione σ di questa equazione del 1° ordine corrisponde dunque una deformazione infinitesima della rigata R della specie voluta. La soluzione σ risulta determinata se si fissa (ad arbitrio) il valore di σ lungo una generatrice; abbiamo dunque il risultato:

Qualunque rigata R *ammette deformazioni infinitesime nelle quali i punti si spostano normalmente alle generatrici, e lungo una generatrice si possono assegnare ad arbitrio le direzioni degli spostamenti normali alla generatrice.*

È da osservarsi che in queste deformazioni infinitesime delle rigate le generatrici non restano rettilinee.

3. Possiamo trasformare il risultato ora ottenuto in un altro che corrisponde al teorema generale secondo cui le deformazioni infinitesime si collegano alle congruenze W (*Lezioni*, vol. II, pag. 52).

Ad ogni punto $P \equiv (u, v)$ della rigata si faccia corrispondere quel punto $P_1 \equiv (u_1, v)$, situato sulla medesima generatrice (v), nel quale la normale $(X_3^{(1)}, Y_3^{(1)}, Z_3^{(1)})$ ha la direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ dello spostamento in P e dimostriamo il seguente teorema:

Quando il punto P *descrive un'asintotica curvilinea, il punto corrispondente* P_1 *descrive un'altra asintotica.*

Troviamo in primo luogo le formole effettive di corrispondenza osservando che pei valori $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}$ di X_1, X_2, X_3 nel punto P_1 si ha

$$(12) \quad \begin{cases} X_1^{(1)} = X_1(u_1, v) = X_1 \\ X_2^{(1)} = X_2(u_1, v) = \operatorname{sen}\sigma\, X_2 - \cos\sigma\, X_3 \\ X_3^{(1)} = X_3(u_1, v) = \cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3 . \end{cases}$$

Per la formola (β) è

$$\frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial v} = \frac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} X_2^{(1)} + \frac{\beta}{\sqrt{G_1}} X_3^{(1)} \left(G_1 = (u_1 - \alpha)^2 + \beta^2\right)$$

e quindi

$$\frac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} (\operatorname{sen}\sigma\, X_2 - \cos\sigma\, X_3) + \frac{\beta}{\sqrt{G_1}} (\cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3) = \frac{u - \alpha}{\sqrt{G}} X_2 + \frac{\beta}{\sqrt{G}} X_3 ,$$

onde segue

$$\begin{cases} \dfrac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} \operatorname{sen}\sigma + \dfrac{\beta\cos\sigma}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{u - \alpha}{\sqrt{G}} \\ -\dfrac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} \cos\sigma + \dfrac{\beta\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{\beta}{\sqrt{G}} . \end{cases}$$

Risolvendo queste ultime, abbiamo le formole di corrispondenza cercate

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{(u - \alpha)\operatorname{sen}\sigma - \beta\cos\sigma}{\sqrt{G}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{(u - \alpha)\cos\sigma + \beta\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}} , \end{cases}$$

ovvero anche

$$(13^*) \quad \frac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} = \frac{\dfrac{u - \sigma}{\beta} \operatorname{tg}\sigma - 1}{\dfrac{u - \alpha}{\beta} + \operatorname{tg}\sigma} .$$

Indichiamo ora Ω, Ω_1 gli angoli d'inclinazione dei piani tangenti in P, P_1 sul piano centrale, onde per la formola di Chasles

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{u - \alpha}{\beta} , \quad \operatorname{tg}\Omega_1 = \frac{u_1 - \alpha}{\beta} ,$$

e la (13*) equivale perciò alla seguente

$$\Omega_1 \equiv \frac{\pi}{2} + \Omega + \sigma. \tag{14}$$

Differenziando la (12_3) ed osservando le (β), viene

$$dX_3^{(1)} = -\frac{\beta}{G_1} X_2^{(1)} du_1 - \left(\frac{\beta}{\sqrt{G_1}} X_1^{(1)} + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} X_2^{(1)}\right) dv,$$

dove D_1'' indica il valore di D'' in P_1. Se si applicano le medesime formole (β) al secondo membro della (13_3) e si paragona col risultato precedente, si ottiene l'identità

$$\frac{\beta}{G_1} du_1 + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} dv = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\beta}{G}\right) du + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D''}{\sqrt{G}}\right) dv. \tag{15}$$

Dobbiamo dimostrare che se $P \equiv (u, v)$ descrive un'asintotica curvilinea, anche $P_1 \equiv (u_1, v)$ descrive un'altra asintotica; ciò equivale a dire che se è verificata l'equazione differenziale

$$\frac{2\beta}{G} du + \frac{D''}{\sqrt{G}} dv = 0, \tag{16}$$

lo sarà anche l'altra

$$\frac{2\beta}{G_1} du_1 + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} dv = 0,$$

ovvero, per la (15), e per la (16) stessa

$$d\sigma + \frac{\beta}{G_1} du_1 - \frac{\beta}{G} du = 0. \tag{17}$$

Così dunque tutto si riduce a provare che dalla (16) segue la (17).

Differenziando

$$u_1 = \alpha + \beta \operatorname{tg} \Omega_1,$$

coll'osservare che

$$\frac{1}{\cos^2 \Omega_1} = \frac{G_1}{\beta^2}$$

risulta

$$\frac{\beta}{G_1} du_1 = d\Omega_1 + \frac{\beta}{G_1} (\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1) dv.$$

Similmente abbiamo

$$\frac{\beta}{G} du = d\Omega + \frac{\beta}{G} (\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega) dv,$$

e sottraendo dalla precedente, coll'osservare la (14), viene

$$\frac{\beta}{G_1} du_1 - \frac{\beta}{G} du = d\sigma - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega) + \frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1),$$

sicchè la (17) si cangia nell'altra equivalente

$$2d\sigma - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\, dv + \frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1)\, dv = 0\ ,$$

od anche

$$2\frac{\partial \sigma}{\partial u} du + 2\frac{\partial \sigma}{\partial v} dv - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\, dv + \frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1)\, dv = 0\,.$$

Sostituendo in questa, per du, dv, le quantità proporzionali, secondo la (16),

$$du : dv :: \frac{D''}{\sqrt{G}} : -\frac{2\beta}{G}\ ,$$

siamo ridotti a verificare che si ha identicamente

$$\frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{2\beta}{G}\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\beta}{G}\left\{\frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1) - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\right\}.$$

Se si osserva l'equazione differenziale (11) cui soddisfa σ e le formole

$$\frac{\beta^2}{G} = \cos^2 \Omega \quad , \quad \frac{\beta^2}{G_1} = \cos^2 \Omega_1\ ,$$

l'identità da verificarsi diventa

$$\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right) + \cos^2 \sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u - \alpha}{G}\right) =$$

$$= \frac{1}{G}\left\{\alpha'(\cos^2 \Omega_1 - \cos^2 \Omega) + \beta'(\operatorname{sen} \Omega_1 \cos \Omega_1 - \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{G} \operatorname{sen}(\Omega_1 - \Omega)\left\} - \alpha' \operatorname{sen}(\Omega_1 + \Omega) + \beta' \cos(\Omega_1 + \Omega)\right\},$$

alla quale, per la (14), si può dare la forma

$$\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right) + \cos \sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u - \alpha}{G}\right) +$$

$$+ \frac{1}{G}\left\{\alpha'(\cos(2\Omega + \sigma) + \beta' \operatorname{sen}(2\Omega + \sigma)\right\} = 0\ ,$$

o in fine

$$\operatorname{sen}\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{\mathrm{G}}\right)+\frac{1}{\mathrm{G}}(\beta'\cos 2\Omega-\alpha'\operatorname{sen}2\Omega)\right\}+$$
$$+\cos\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{\mathrm{G}}\right)+\frac{1}{\mathrm{G}}(\alpha'\cos 2\Omega-\beta'\operatorname{sen}^2 2\Omega)\right\}=0\,.$$

Ma da $\operatorname{tg}\Omega=\dfrac{u-\alpha}{\beta}$ segue

$$\operatorname{sen}2\Omega=\frac{2\beta(u-\alpha)}{\mathrm{G}}\quad,\quad\cos 2\Omega=\frac{\beta^2-(u-\alpha)^2}{\mathrm{G}}\,,$$

e l'ultima identità da verificarsi resta quindi

$$\operatorname{sen}\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{\mathrm{G}}\right)+\frac{\beta'[\beta^2-(u-\alpha)^2]-2\beta\alpha'(u-\alpha)}{\mathrm{G}^2}\right\}+$$
$$\cos\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{\mathrm{G}}\right)+\frac{2\beta\beta'(u-\alpha)+\alpha'[\beta^2-(u-\alpha)^2]}{\mathrm{G}^2}\right\}=0\,.$$

Ora qui i due coefficienti di $\operatorname{sen}\sigma$, $\cos\sigma$ sono identicamente nulli ed il nostro teorema è dimostrato.

4. Resta così provato che nella corrispondenza di punto a punto, stabilita sulla rigata R al principio del n. 3, vengono conservate insieme le asintotiche rettilinee (generatrici) e quelle curvilinee. Essa è d'altronde *la più generale trasformazione* della rigata in sè che conservi le asintotiche dei due sistemi; e in vero si è visto al n. 2 che l'angolo σ resta affatto arbitrario lungo una generatrice, cioè resta arbitraria *per una generatrice* la legge di corrispondenza dei punti P, P_1. Dopo queste osservazioni, possiamo caratterizzare le deformazioni infinitesime delle rigate al n. 2 colla costruzione geometrica seguente:

Di una qualunque rigata R *si consideri una trasformazione in sè medesima che conservi le generatrici e le asintotiche curvilinee, e del resto arbitraria; ne resta individuata una deformazione infinitesima della rigata nella quale ciascun punto* P *si sposta nella direzione parallela alla normale nel punto corrispondente* P_1.

Sotto questa forma il nostro risultato corrisponde perfettamente alla costruzione generale che collega le deformazioni infinitesime delle superficie alle congruenze W (*Lezioni*, vol. II, pag. 52); soltanto, nel caso attuale, avviene che la doppia infinità di raggi della congruenza W si riduce alla semplice infinità dei raggi della rigata.

Ritorniamo in fine alle speciali rigate deformate del catenoide ed alla loro proprietà caratteristica del n. 1. Se per una tale rigata fissiamo la legge di corrispondenza dei punti P, P_1 lungo una generatrice in guisa che le normali in P, P_1 formino fra loro un angolo costante arbitrario (non nullo), lo stesso avverrà per qualunque altra generatrice, e l'angolo resterà il medesimo.

Possiamo dunque enunciare la proprietà dimostrata al n. 1 sotto quest'altra forma equivalente:

Le superficie rigate applicabili sul catenoide, e queste soltanto, ammettono delle deformazioni infinitesime nelle quali gli spostamenti dei singoli punti avvengono in direzione normale alle generatrici ed inclinata di un angolo costante arbitrario (non retto) sulla superficie.

Matematica. — *Sugli ordini degli infiniti.* Nota del Corrispondente G. Peano.

1. Come è noto, dicesi che la funzione fx diventa infinita di ordine m, per x vergente ad infinito, quando il limite di $\frac{fx}{x^m}$ è una quantità finita non nulla.

Possiamo limitarci al caso in cui la variabile assuma soli valori interi; la funzione si suol chiamare una successione. Si può supporre che fx assuma soli valori positivi; altrimenti basta parlare del suo modulo. Allora, adottati i simboli del *Formulario matematico*, da me edito, ediz. 5ª, 1908, si ha:

$$(1) \qquad f \varepsilon \mathrm{QFN_0} \,.\, m \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset : \mathrm{ord}\, f = m \,.=.\, \lim \frac{fx}{x^m} \Big| \, x \,\varepsilon\, \mathrm{Q}.$$

Il numero m può essere intero o fratto o irrazionale, positivo o negativo. La funzione il cui ordine di infinito è negativo, si suol dire infinitesima.

Non sempre esiste nel campo delle quantità reali, indicate col simbolo q, il numero m, che soddisfa alla condizione (1). Allora Du Bois-Reymond, ed altri, introdussero gli ordini colle definizioni seguenti:

$$(2) \qquad f, g \varepsilon \mathrm{QFN_0} \,.\, \supset : \mathrm{ord}\, f > \mathrm{ord}\, g \,.=.\, \lim \frac{fx}{gx} \Big| \, x = \infty$$

$$(3) \qquad \quad ,, \; = \; ,, \qquad\qquad ,, \quad \varepsilon\, \mathrm{Q}$$

$$(4) \qquad \quad ,, \; < \; ,, \qquad\qquad ,, \quad = 0\,.$$

Cioè ad ogni funzione f si fa corrispondere un nuovo ente, detto suo ordine.

Date due funzioni f e g, si dirà che l'ordine di f è maggiore, o eguale, o minore, dell'ordine di g, secondochè il limite del rapporto $\frac{fx}{gx}$, variando x (verso l'infinito), è infinito, o ha un valore finito, o è uguale a zero. Le definizioni (2), (3) e (4) sono definizioni per astrazione.