ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

le normali in P, P_1 formino fra loro un angolo costante arbitrario (non nullo), lo stesso avverrà per qualunque altra generatrice, e l'angolo resterà il medesimo.

Possiamo dunque enunciare la proprietà dimostrata al n. 1 sotto quest'altra forma equivalente:

Le superficie rigate applicabili sul catenoide, e queste soltanto, ammettono delle deformazioni infinitesime nelle quali gli spostamenti dei singoli punti avvengono in direzione normale alle generatrici ed inclinata di un angolo costante arbitrario (non retto) sulla superficie.

Matematica. — *Sugli ordini degli infiniti*. Nota del Corrispondente G. PEANO.

1. Come è noto, dicesi che la funzione fx diventa infinita di ordine m, per x vergente ad infinito, quando il limite di $\frac{fx}{x^m}$ è una quantità finita non nulla.

Possiamo limitarci al caso in cui la variabile assuma soli valori interi; la funzione si suol chiamare una successione. Si può supporre che fx assuma soli valori positivi; altrimenti basta parlare del suo modulo. Allora, adottati i simboli del *Formulario matematico*, da me edito, ediz. 5ª, 1908, si ha:

$$(1) \qquad f \varepsilon \mathrm{QFN_0} \,.\, m \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \Im : \mathrm{ord}\, f = m \,.=.\, \lim \frac{fx}{x^m} \Big| x \,\varepsilon\, \mathrm{Q}.$$

Il numero m può essere intero o fratto o irrazionale, positivo o negativo. La funzione il cui ordine di infinito è negativo, si suol dire infinitesima.

Non sempre esiste nel campo delle quantità reali, indicate col simbolo q, il numero m, che soddisfa alla condizione (1). Allora Du Bois-Reymond, ed altri, introdussero gli ordini colle definizioni seguenti:

$$\begin{array}{lll}
(2) & f, g \varepsilon \mathrm{QFN_0} \,.\, \Im : \mathrm{ord}\, f > \mathrm{ord}\, g \,.=.\, \lim \frac{fx}{gx} \Big| & x = \infty \\
(3) & \qquad\qquad\qquad\quad " \;=\; " \qquad\qquad\quad " & \varepsilon\, \mathrm{Q} \\
(4) & \qquad\qquad\qquad\quad " \;<\; " \qquad\qquad\quad " & = 0\,.
\end{array}$$

Cioè ad ogni funzione f si fa corrispondere un nuovo ente, detto suo ordine.

Date due funzioni f e g, si dirà che l'ordine di f è maggiore, o eguale, o minore, dell'ordine di g, secondochè il limite del rapporto $\frac{fx}{gx}$, variando x (verso l'infinito), è infinito, o ha un valore finito, o è uguale a zero. Le definizioni (2), (3) e (4) sono definizioni per astrazione.

Gli ordini delle funzioni costituiscono una categoria di enti, chiamati ancora grandezze, più ampia della categoria q delle quantità reali.

Gli ordini di e^x, e^{x^2}, ... sono tutti infiniti, ognuno più grande del precedente. Gli ordini di $\log x$, $\log\log x$, ... sono grandezze, maggiori di 0, e minori d'ogni numero reale positivo, e ognuno è minore del precedente. Così si presentano degli infiniti e infinitesimi attuali.

La somma degli ordini delle funzioni fx e gx si suol definire come l'ordine del prodotto $fx \times gx$, ove varii x:

$$\text{(5)} \qquad \text{ord}\, f + \text{ord}\, g = \text{ord}\, fx \times gx | x .$$

Questa definizione ha il difetto formale di esprimere $\text{ord}\, f + \text{ord}\, g$ non già mediante $\text{ord}\, f$ e $\text{ord}\, g$, ma bensì mediante f e g, che non sono individuate dai loro ordini. In altre parole, la definizione (5) deve essere accompagnata dalla dimostrazione che la somma considerata non varia, se al posto di f e di g pongo altre funzioni aventi lo stesso ordine. E la cosa è facile a farsi.

La difficoltà incomincia colla definizione del prodotto degli ordini.

Il Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris, 1910, ha ripreso a trattare la teoria degli ordini degli infiniti. Egli definisce, a pag. 20, il prodotto degli ordini di fx e gx come l'ordine della funzione di funzione fg, cioè:

$$\text{ord}\, f \times \text{ord}\, g = \text{ord}\, f(gx) | x .$$

Questa definizione ha lo stesso difetto formale della (5); ma questo difetto ora è reale. Il sig. V. Mago, nella sua tesi manoscritta per la laurea all'università di Torino, osserva che effettivamente $\text{ord}\, f \times \text{ord}\, g$ non è funzione di $\text{ord}\, f$, e di $\text{ord}\, g$, ma dipende dalla scelta delle funzioni f e g; ossia sostituendo f e g con funzioni f' e g', tali che $\text{ord}\, f = \text{ord}\, f'$, e $\text{ord}\, g = \text{ord}\, g'$, non segue $\text{ord}\, f \times \text{ord}\, f' = \text{ord}\, g \times \text{ord}\, g'$. Basta verificarlo sull'esempio:

$$fx = f'x = e^x \quad , \quad gx = x \quad , \quad g'x = 2x .$$

Lo stesso inconveniente presenta la definizione che il Borel dà a pag. 37, che equivale a scrivere:

$$(\text{ord}\, f) \times (\text{ord}\, g) = \text{ord}\, e^{\frac{\log fx \times \log gx}{\log x}} | x ,$$

che dà la moltiplicazione di due numeri, ma in cui il secondo membro non si presenta, e non si può ridurre ad essere una funzione di $\text{ord}\, f$, e di $\text{ord}\, g$. Risulta dallo stesso esempio.

2. Il fatto che si può definire la somma, ma non il prodotto di due ordini ci conduce all'osservazione che la definizione dell'uguaglianza degli

ordini ha dell'arbitrario. Le funzioni f e g hanno lo stesso ordine, se il limite del loro rapporto è finito; ma questo caso si può distinguere in altri, secondochè il rapporto è minore o maggiore di 1, ed essendo l'unità, secondochè vi converge crescendo o decrescendo, ecc. Invece del rapporto, prendendo i logaritmi, si può considerare la differenza fra due funzioni. Così si è condotti ad unire ad ogni funzione un nuovo ente, che rappresenta l'ultimo modo di comportarsi della funzione, e che, in mancanza di termine più appropriato, dirò suo *fine*, e che si definisce per astrazione come segue.

Il fine d'una funzione avente il valore costante a è questa costante.

Il fine d'una funzione f è maggiore, o eguale, o minore del fine d'una funzione g, se si può determinare un indice m, tale che per ogni indice x da m in poi, sempre si abbia

$$fx > gx\,, \quad \text{o} \quad fx = gx\,, \quad \text{o} \quad fx < gx\,.$$

In simboli:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \text{fine}\,(\iota\, a; \mathrm{N}_0) = a \tag{1}$$

$f, g \,\varepsilon\, \mathrm{q\,F\,N}_0 \,.\, \supset :$

$$\begin{array}{lllll} (2) & \text{fine}\, f > \text{fine}\, g \,.\, = \exists\, \mathrm{N}_0 \cap m \ni (x \,\varepsilon\, m + \mathrm{N}_0 \,.\, \supset_x .\, fx > gx) \\ (3) & \qquad\ \ = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \\ (4) & \qquad\ \ < \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad < \end{array}$$

Ad ogni successione f corrisponde allora un nuovo ente, suo fine; e questi enti hanno le stesse proprietà delle quantità reali, salvochè non necessariamente il fine di una prima successione f dovrà essere o maggiore, o eguale, o minore del fine d'una seconda; come già avveniva per gli ordini.

Due funzioni, per aver fini eguali, non è necessario che siano sempre eguali; basta lo siano da un certo valore della variabile in poi; ossia il fine di una successione è un ente diverso dalla successione.

Fra i fini delle successioni, ci sono le quantità reali, come risulta dalla (1).

I fini delle funzioni x, x^2, ... sono infiniti, e ognuno di essi è maggiore dei precedenti. I fini delle funzioni $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$ sono enti maggiori di 0, secondo le definizioni (1) e (2), e minori d'ogni quantità positiva.

Si presentano così nuove categorie di enti infiniti e infinitesimi attuali, o costanti. E si vede che la differenza fra gl'infiniti attuali o costanti, e quelli potenziali o variabili, questione che ha tanto appassionato e ancora appassiona i filosofi matematici, sia una questione di puro linguaggio. La funzione $\frac{1}{x}$, per x tendente ad infinito, è un infinitesimo variabile; il suo fine è un infinitesimo costante.

Sopra i fini possiamo definire tutte le operazioni algebriche:

(5)
$$\text{fine}\, f + \text{fine}\, g = \text{fine}\,(fx + gx)|x$$
$$\text{fine}\, f \times \text{fine}\, g = \text{fine}\,(fx \times gx)|x\,,$$
ecc.

Si riconosce facilmente che i secondi membri sono funzioni di fine f, e fine g, cioè non si alterano sostituendo a f e g altre funzioni aventi lo stesso fine.

La definizione del fine d'una funzione è indipendente dall'idea di limite; anzi si può definire questo mediante quello:

$$f \varepsilon \mathrm{q\,F\,N_0} \,.\, \supset .\, \max \mathrm{Lm}\, f = \mathrm{l_1\, q} \cap a \ni (\text{fine}\, f < a)$$

cioè il massimo limite, « la plus grande des limites » secondo Cauchy, è il limite inferiore delle quantità reali, più grandi del fine della funzione.

Mediante il fine, si può definire l'ordine d'una funzione

$$\text{ord}\, f = \text{fine}\, \frac{\log fx + hx}{\log x}\,,$$

ove hx è una funzione arbitraria, avente un limite finito: $\lim h \varepsilon \mathrm{q}$.

L'ordine si presenta come una classe di fini.

L'affermazione che l'ordine del logaritmo è un infinitesimo costante, si traduce allora nell'altra: $\dfrac{\log \log x}{\log x}$ è un infinitesimo variabile.

Topografia. — *« Media Pars Urbis ». Rilievo planimetrico ed altimetrico eseguito dagli allievi della Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma, colla guida del prof. U. Barbieri e dell'ing. G. Cassinis.* Nota del Corrispondente V. Reina.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.