ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Chimica-fisica — *Sulle proprietà colloidali, e particolarmente sul trasporto elettrico dell'amido.* Nota del Corrispondente F. Bottazzi e di C. Victorow (da Kasan).

Chimica-fisica. — *Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina.* Nota del Corrispondente Filippo Bottazzi e di Noè Scalinci.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le successioni minimizzanti nel calcolo delle variazioni.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. Mi riferirò dapprima al problema di Dirichlet: i risultati sono, come vedremo, senz'altro estendibili a problemi più generali. Sia D un campo del piano (x, y), e ne sia C il contorno. Sia $\}f\{$ l'insieme delle funzioni $f(x, y)$ limite e continue insieme alle loro prime derivate in D [1], che nei punti di C (escluso al più un aggregato di punti di C linearmente nullo [2], che potrà anche variare da funzione a funzione di $\}f\{$), assumono valori prefissati a priori. Posto

$$J(f) = \int\int_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy\,,$$

sia d il limite inferiore dei valori $J(f)$, quando $f(x, y)$ varia in $\}f\{$.

Diremo *minimizzante* ogni successione di funzioni $f_1, f_2, f_3, \ldots$ di $\}f\{$ tale che $\lim_{n=\infty} J(f_n) = d$. In alcune Memorie [3] ho studiato i rapporti tra una tale successione minimizzante, e una funzione limite F, appartenente a $\}f\{$, soddisfacente alla $J(F) = d$, e armonica quindi p. es. in ogni cerchio

(1) Si potrebbero imporre a queste derivate condizioni meno restrittive.

(2) Dico che un aggregato di punti di C o di D è linearmente nullo, se i valori di un parametro α, tali che la retta $x = \alpha$ (o la retta $y = \alpha$, o il cerchio $x^2 + y^2 = \alpha$, ecc.) contenga almeno un punto dell'aggregato stesso, formano un insieme di misura nulla.

(3) Cfr. in particolar modo: *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza* ecc. Rend. del Circolo Matem. di Palermo, tomo 23; *Nuove applicazioni del principio di minimo*, Annali di Matem, tomo 14 della 2ª serie ecc.

formato da punti tutti appartenenti a D. Il teorema fondamentale (dal quale si può anche dedurre il *teorema di esistenza* per la F) è il seguente:

I) *Sia* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *una successione minimizzante; sia cioè* $J(f_i) = d + \varepsilon_i$, *dove* $\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$. *Si estragga da essa una successione subordinata* $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, \ldots$, *tale che la serie* $\sum_n \varepsilon_{i_n}^{\frac{1}{3}}$ *sia convergente (ciò che è possibile in infiniti modi, perchè* $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$). *In ogni punto di* D *(escluso al più un aggregato* E *di punti di* D *linearmente nullo) vale la* $\lim_{n=\infty} f_{i_n} = F$.

II) *Il limite per* $n = \infty$ *dell'integrale di* f_{i_n}, *esteso ad una qualsiasi linea o superficie* A, *i cui punti appartengono tutti a* D, *è proprio uguale al corrispondente integrale di* F. *Se* A *è un'area, questa proprietà vale anche per derivate prime omologhe di* f_{i_n} *e di* F.

2. Le ricerche di questa Nota partono dalla seguente osservazione:

III) *Le proprietà del teorema* II *del* § 1 *non sono vere soltanto per la successione subordinata delle* f_{i_n}, *ma anche per la successione delle* f_n, *cioè per ogni successione minimizzante.*

Questo teorema si può estendere (teor. IV) dalle successioni agli insiemi minimizzanti più generali: cioè ad ogni insiemi di funzioni $f(x, y)$ di $\}f\{$ tale che, se ε è un numero piccolo a piacere, esiste in esso una funzione $f(x)$ tale che $J(f) - d \leq \varepsilon$.

IV) *Fissata la linea od area* A, *allora, dato un numero* σ *piccolo a piacere, si può trovare un numero* ε *tale che, se* f *è una funzione di* $\}f\{$ *soddisfacente alla* $J(f) - d \leq \varepsilon$, *gli integrali di* f *e di* F, *estesi a* A, *differiscano per meno di* σ. *E un teorema analogo vale, se* A *è un'area, per gli integrali di derivate prime omologhe di* f *e di* F.

Dimostriamo il teorema III per la parte che riguarda F e le f_i: una dimostrazione analoga vale per le loro derivate. Se il teorema III non fosse vero, nella successione delle f_n esisterebbe una successione subordinata $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots$ tale che il limite per $n = \infty$ dell'integrale di f_{j_n} esteso a A esisterebbe, e sarebbe distinto dall'integrale di F esteso a A. E questo avverrebbe per ogni successione contenuta nella successione delle f_{j_n}. La successione *minimizzante* delle f_{j_n} non soddisferebbe dunque al teorema II del § 1: ciò che è assurdo. Similmente, se il teorema IV non fosse vero, si potrebbero trovare infinite funzioni $f_1, f_2, \ldots$ tali che $\lim_{n=\infty} [J(f_n) - d] = 0$, e che la differenza degli integrali di f_n e di F estesi a A sarebbe per ogni valore di n maggiore di σ. La successione *minimizzante* delle f_n contradirebbe ai teoremi II e III: ciò che è assurdo.

Tutti questi risultati si estendono al caso più generale, in cui si voglia rendere minimo un integrale, il cui integrando sia una forma (quadratica) positiva nelle derivate del primo ordine di f, *e quindi alle* *più generali equazioni lineari differenziali del 2° ordine, che provengono da un problema di calcolo delle variazioni.*

E ne risulterà in particolare, che, se la successione $f_1, f_2, \ldots$ è minimizzante per il problema studiato, la media dei valori di f_n presa in un qualsiasi campo $\varDelta$ lineare o superficiale di punti appartenenti a D, o i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (o serie analoga) di f_n su una circonferenza formata da punti appartenenti a D, *hanno per* $n = \infty$ *un limite uguale alla media corrispondente, o ai coefficienti del corrispondente sviluppo in serie per la funzione* F. E il teorema IV estende questi risultati *agli insiemi minimizzanti più generali.*

L'integrando dell'integrale $J(f)$, che si vuol rendere minimo sia invece una forma quadratica *definita* delle derivate di $f(x, y)$ di ordine $k > 1$ (cfr. la Memoria citata, dove come esempio è studiato il problema delle funzioni biarmoniche). L'equazione differenziale corrispondente $G(F) = 0$ sarà di ordine $2k > 2$. Sia $\{f\}$ il campo delle funzioni $f(x, y)$, che su C assumono valori prefissati insieme alle derivate di ordine $1, 2, \ldots, k-1$ (escluso al più per le derivate di ordine $k-1$ un aggregato linearmente nullo di punti di C, anche variabile da funzione a funzione di $\{f\}$), e che sono p. es. entro D finite e continue insieme alle derivate di ordine $1, 2, \ldots, k$. Sia d il limite inferiore di $J(f)$, quando f varia in $\{f\}$. Esiste una funzione F di $\{f\}$ soddisfacente alle $J(F) = d$, $G(F) = 0$. Vale allora (cfr. loc. cit.) un teorema analogo al I del § 1, con questa sola variante che la $\lim_{n=\infty} f_{i_n} = F$ è vera in *ogni* punto di D (*nessun* punto escluso). Anzi una proprietà simile vale per le derivate di ordine $1, 2, \ldots, k-2$; le proprietà date nei teoremi I, II del § 1 per le f_{i_n} e loro derivate prime si dimostrano nel caso attuale rispettivamente per le derivate di ordine $k-1$ e k delle f_{i_n}. Coi metodi precedenti troveremo dunque:

Teoremi III e IV^{bis}. *Per ogni punto* A *di* D, *dato un numero* σ *piccolo a piacere, si può trovare un numero* ε *tale che, se* $J(f) - d < \varepsilon$, *i valori di* f *ed* F *in* A *differiscono per meno di* σ. *E altrettanto avviene per le loro derivate omologhe di ordine* $1, 2, \ldots, k-2$. *Se* $f_1, f_2, \ldots$ *è una successione minimizzante, il limite per* $n = \infty$ *del valore di* f_n *in ogni punto* A *di* E *è proprio il valore di* F *in* A. *Altrettanto avviene per i valori in* A *delle derivate di* f_n, F *di ordine* $1, 2, \ldots, k-2$, *per gli integrali omologhi lineari o superficiali delle derivate di* f_n, F *di ordine* $k-1$, *e per gli integrali omologhi superficiali delle derivate di* f_n, F *di ordine* k.

Da questo teorema è così esaurita nel modo più generale la teoria delle successioni e degli insiemi minimizzanti.

I risultati di una mia Nota recente [1] *permettono di estendere questi teoremi anche a problemi che*, come il problema di Plateau, *conducono ad*

(1) *Il teorema di Osgood* ecc. Questi Rendiconti, 17 aprile 1910.

equazioni differenziali non lineari, purchè si ammetta il relativo teorema di esistenza (per la funzione F).

3. In una recente e importante Memoria: *Sur le principe de minimum* (¹), il sig. Zaremba osserva anzitutto (nel caso del problema di Dirichlet) che l'esistenza di punti sul contorno C di D, ove la F non assume i valori prefissati, è un fatto insito nella natura stessa del problema che esaminiamo, almeno fino a che non si fa qualche particolare ipotesi su D. Se infatti al § 1 avessimo anche supposto che ogni funzione $f(x, y)$ di $\{f\}$ avesse valori prefissati in ogni punto di C, la funzione limite F potrebbe non assumere tali valori in un aggregato di punti di C linearmente nullo. Ciò avviene p. es. nel punto $x = y = 0$, se il campo D è il luogo dei punti soddisfacenti alle $0 < x^2 + y^2 \leq 1$. E lo Zaremba si propone quindi la domanda: *Se* P *è il problema al contorno* (Randwerthaufgabe) *corrispondente a un dato problema di calcolo delle variazioni* (p. es. il problema di Dirichlet corrispondente al problema di rendere minimo l'integrale $J(f)$ del § 1) *è possibile far corrispondere ad una qualsiasi successione minimizzante $f_1, f_2, \dots$ un'altra successione $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ convergente in tutti i punti di* D, *tale che la funzione* $F = \lim_{n=\infty} \varphi_n$ *risolva un problema* P′ *equivalente al problema* P, *quando quest'ultimo è risolubile?*

E lo Zaremba risponde affermativamente a questa domanda per il caso del problema di Dirichlet nel seguente modo. Per ogni punto A *interno* a D si costruisca un cerchio, formato di punti tutti appartenenti a D; e si definiscano le φ_n, assumendo come valore di φ_n in A la media dei valori di f_n in tale cerchio. Questo risultato dello Zaremba si deduce immediatamente dai precedenti teoremi. Che esista infatti il $\lim_{n=\infty} \varphi_n$ si deduce tosto dal teorema III e dalle ultime osservazioni del § 2. Anzi il teorema IV estende questo teorema ad ogni insieme minimizzante. Che poi sia proprio $\lim_{n=\infty} \varphi_n = F$ dipende da ciò che la media dei valori della funzione armonica F nel solito cerchio di centro A (media che per il teorema III è uguale a $\lim_{n=\infty} \varphi_n$) coincide per noti teoremi col valore di F nel punto A. Si può evidentemente poi dire che F soddisfa ad un problema P′ equivalente al problema P di Dirichlet, se questo è risolubile; si può p. es. enunciare il problema P′ dicendo che $J(F) = d$, oppure che in ogni cerchio formato di punti tutti appartenenti a D la F è armonica. Quanto poi alle condizioni, cui deve soddisfare la F sul contorno C di D, queste si possono enunciare dicendo che la F assume in C i valori prefissati eccetto che in un aggregato di punti di misura lineare nulla, oppure si possono trasformare in una uguaglianza tra integrali di F e integrali di una funzione φ che su C as-

(¹) Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie, juillet 1909.

suma i valori assegnati, come appunto fa lo Zaremba. E la ragione intima che rende possibile tale trasformazione di condizioni sta in ciò che gli aggregati di misura nulla non influiscono sui valori di un integrale.

4. Ora noi ci chiediamo: *Si può rispondere affermativamente alla domanda posta dal prof. Zaremba anche in casi più generali?*

Riferiamoci a problemi (definiti) di calcolo delle variazioni, che corrispondono ad equazioni differenziali lineari ([1]). Per i teoremi III e IV^{bis}) la domanda posta dallo Zaremba ha interesse soltanto per quelli di questi problemi che conducono a equazioni differenziali del secondo ordine ([2]). In tal caso si può ancora, come sopra, costruire la successione delle φ_n; questa è ancora convergente, ma il suo limite $\Phi = \lim \varphi_n$ non coincide più generalmente con la funzione minimizzante F cercata. E ciò, perchè per problemi distinti dal problema di Dirichlet non è più vero che la funzione cercata F abbia come valore nel punto A la media dei valori da essa assunti in un cerchio di centro A. La F si potrebbe bensì definire come il limite di Φ, quando i raggi dei cerchi costruiti col centro nei varî punti A del campo D tendono a zero, oppure in altro modo partendo dai teoremi dei §§ 1-2. Ma, se noi volessimo proprio costruire la successione delle φ_n tale che $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n = F$, potremmo usare il seguente procedimento, che noi esporremo dapprima per il caso classico del problema di Dirichlet. Per ogni punto A interno a D costruiamo una circonferenza L avente A per centro, una funzione R delle coordinate di A per raggio, tale che ogni punto interno a L, σ posto su L, appartenga a D.

Se u è una qualsiasi funzione *armonica* entro L, e se ϱ, θ sono coordinate polari col centro in A, la formola di Green ce ne dà il valore $u(A)$ nel punto A sotto forma di un integrale definito $\int Q(u)\, \varrho\, d\theta$ esteso ad una qualsiasi circonferenza concentrica e interna a L, dove $Q(u)$ è funzione di ϱ, θ e dipende in più dalla u e dalle sue prime derivate. Quindi

$$u(A) = \frac{1}{R}\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} Q(u)\, \varrho\, d\theta = \frac{1}{R}\int_{(L)} Q(u)\, d\sigma ,$$

dove $d\sigma = \varrho\, d\varrho\, d\theta$ è l'elemento d'area, e l'integrazione è estesa a tutto il cerchio (L) limitato dalla circonferenza L. La successione delle φ_n, costruita assumendo $\frac{1}{R}\int_{(L)} Q(f_n)\, d\sigma$ come valore di φ_n in A, gode per i teoremi del

([1]) Quelle delle seguenti considerazioni, che non ricorrono all'uso della formola di Green, o altra formola analoga, si possono anche applicare a problemi di variazione, che conducono ad equazioni differenziali non lineari, purchè si ammetta il corrispondente teorema di esistenza.

([2]) Del resto queste considerazioni valgono anche per equazioni differenziali di ordine superiore al secondo, ma perdono in tal caso quasi ogni importanza.

§ 2 la proprietà richiesta dal prof. Zaremba [1]. E si ricorse per costruirla a integrali superficiali (e non curvilinei), perchè $Q(f_n)$ dipende anche dalle derivate di f_n. E il metodo qui svolto è generalizzabile, perchè ad ognuna delle equazioni differenziali citate si può estendere la formola di Green. Per estendere il metodo dello Zaremba (che in sostanza suppone di saper calcolare il valore di una funzione armonica nel centro di un cerchio, quando se ne conoscano i valori alla periferia) si richiederebbe in modo analogo di saper risolvere in qualche caso particolare il problema studiato.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz*. Nota del dott. Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

1. Supponiamo che l'equazione algebrica

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

abbia tutti i suoi coefficienti positivi. Essa non avrà certamente radici nulle nè positive; ma noi non possiamo senz'altro giudicare se abbia o non abbia radici complesse con parte reale nulla o positiva. Si presenta dunque il problema, che Hurwitz ha, da tempo, elegantemente risoluto [2] di cercare condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione (1) abbia soltanto negative le sue radici reali, e le parti reali delle sue radici complesse.

L'importanza di questo problema, anche nel campo dell'immediata pratica, è molto notevole; già Hurwitz nella sua Memoria ne fa cenno, ed io posso ora aggiungere che sono stato condotto a studiarlo, lavorando, per conto della Brigata Specialisti, sulla stabilità dell'aeroplano.

Intanto, se l'equazione (1) deve avere negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse, allora il polinomio $f(x)$ deve potersi decomporre in fattori del tipo $x + \alpha$ e del tipo $(x + \alpha)^2 + \beta^2$: dunque non potrebbe avere coefficienti non positivi (ammesso, si capisce, che a_0 sia positivo).

Consideriamo ora il determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix},$$

[1] Dai teor. II, III si deduce infatti che il $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n$ nel punto generico A esiste, ed è uguale a $\frac{1}{R}\int_{(L)} Q(F)\,d\sigma$, ossia, per la formola di Green, è uguale proprio al valore di F nel punto A.

[2] Mathematische Annalen. 1895, pp. 273-284.