ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

§ 2 la proprietà richiesta dal prof. Zaremba (¹). E si ricorse per costruirla a integrali superficiali (e non curvilinei), perchè $Q(f_n)$ dipende anche dalle derivate di f_n. E il metodo qui svolto è generalizzabile, perchè ad ognuna delle equazioni differenziali citate si può estendere la formola di Green. Per estendere il metodo dello Zaremba (che in sostanza suppone di saper calcolare il valore di una funzione armonica nel centro di un cerchio, quando se ne conoscano i valori alla periferia) si richiederebbe in modo analogo di saper risolvere in qualche caso particolare il problema studiato.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz*. Nota del dott. Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

1. Supponiamo che l'equazione algebrica

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

abbia tutti i suoi coefficienti positivi. Essa non avrà certamente radici nulle nè positive; ma noi non possiamo senz'altro giudicare se abbia o non abbia radici complesse con parte reale nulla o positiva. Si presenta dunque il problema, che Hurwitz ha, da tempo, elegantemente risoluto (²) di cercare condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione (1) abbia soltanto negative le sue radici reali, e le parti reali delle sue radici complesse.

L'importanza di questo problema, anche nel campo dell'immediata pratica, è molto notevole; già Hurwitz nella sua Memoria ne fa cenno, ed io posso ora aggiungere che sono stato condotto a studiarlo, lavorando, per conto della Brigata Specialisti, sulla stabilità dell'aeroplano.

Intanto, se l'equazione (1) deve avere negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse, allora il polinomio $f(x)$ deve potersi decomporre in fattori del tipo $x + \alpha$ e del tipo $(x + \alpha)^2 + \beta^2$: dunque non potrebbe avere coefficienti non positivi (ammesso, si capisce, che a_0 sia positivo).

Consideriamo ora il determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

(¹) Dai teor. II, III si deduce infatti che il $\lim_{n=\infty} \varphi_n$ nel punto generico A esiste, ed è uguale a $\frac{1}{R}\int_{(L)} Q(F)\,d\sigma$, ossia, per la formola di Green, è uguale proprio al valore di F nel punto A.

(²) Mathematische Annalen. 1895, pp. 273-284.

e chiamiamo genericamente D_ν il minore principale formato colle prime ν linee e colle prime ν colonne del determinante D_n. Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) abbia soltanto negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che siano positivi tutti gli elementi della catena

$$a_0\,,\,D_1\,,\,D_2\,,\,D_3\,,\ldots,\,D_{n-1}\,,\,D_n\,.$$

Questa elegante soluzione di Hurwitz lascia tuttavia in una certa oscurità l'essenza del problema; e non credo inutile presentare una soluzione nuova, la quale, sebbene conduca, in pratica, a calcoli, spesso, lunghi e complicati, è teoricamente più intuitiva e più diretta.

2. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono le n radici, non necessariamente fra di loro diverse, di $f(x)=0$, noi diremo *equazione alle semisomme* un'equazione, $F(x)=0$, di grado $\frac{n(n-1)}{2}$, la quale abbia per radici le $\frac{n(n-1)}{2}$ semisomme $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}, \ldots, \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}$. Questa equazione si può formare, senza risolvere $f(x)=0$, con un metodo perfettamente analogo a quello che serve a formare l'equazione di Lagrange, *ai quadrati delle differenze*.

Poniamo

$$(2)\qquad K(x)=\left(\frac{x+\alpha_1}{2}\right)^k+\left(\frac{x+\alpha_2}{2}\right)^k+\cdots+\left(\frac{x+\alpha_n}{2}\right)^k$$

$$s_\nu=\alpha_1^\nu+\alpha_2^\nu+\cdots+\alpha_n^\nu$$

$$S_\nu=\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^\nu+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)^\nu+\cdots+\left(\frac{\alpha_{n+1}+\alpha_n}{2}\right)^\nu.$$

Queste s_ν, S_ν sono le cosiddette *somme delle potenze simili*; esse sono legate ai coefficienti dalle note e fondamentali formule di Neewton.

Sviluppando colla formula del binomio i varî termini che costituiscono $K(x)$, otteniamo

$$2^k K(x)=\sum_{\mu=1}^{n}\left[x^k+\binom{k}{1}x^{k-1}\alpha_\mu+\binom{k}{2}x^{k-2}\alpha_\mu^2+\cdots+\alpha_\mu^k\right]$$

$$=s_0x^k+\binom{k}{1}s_1x^{k-1}+\binom{k}{2}s_2x^{k-2}+\cdots+s_k.$$

Da ciò risulta subito

$$K(\alpha_1)+K(\alpha_2)+\cdots+K(\alpha_n)=\frac{s_0s_k+\binom{k}{1}s_1s_{k-1}+\cdots+s_ks_0}{2^k}.$$

Intanto osserviamo che $K(\alpha_1) + K(\alpha_2) + \cdots + K(\alpha_n)$ vale $s_k + 2S_k$, come risulta dalla semplice ispezione della formula (2), dunque otteniamo

$$S_k = -\frac{1}{2} s_k + \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} s_\nu s_{k-\nu} . \tag{3}$$

Notiamo che nelle formule di Neewton il coefficiente a_r non si presenta se non quando giungiamo a considerare s_r. Tale osservazione permette di dedurre proprietà utili; ma sarebbe forse inopportuno farne qui cenno.

3. Formata che sia l'equazione alle semisomme, noi possiamo subito trovare una condizione necessaria e sufficiente perchè $f(x) = 0$ abbia soltanto negative le parti reali delle radici. Intanto bisogna che siano positivi (o almeno di ugual segno) tutti i suoi coefficienti: ciò risulta, come abbiamo osservato anche prima, dalla sua decomposizione in fattori di primo e di secondo grado. Supposti positivi tutti i coefficienti di $f(x) = 0$, resta senza altro esclusa la possibilità di radici reali nulle o positive. Potrebbero, caso mai, presentarsi radici complesse coniugate $\lambda + i\mu$, $\lambda - i\mu$, con λ nullo o positivo; vediamo in che modo ne risentirebbe l'equazione $F(x) = 0$, alle semisomme: essa dovrebbe presentare la radice *reale* λ, nulla o positiva. Se, invece, l'equazione $f(x) = 0$ non ha radici con parte reale nulla o positiva, allora la $F(x) = 0$ non potrà avere radici reali nulle o positive.

Tutto si riduce all'esame della possibilità che $F(x) = 0$ abbia radici *reali nulle o positive*. Ora basta che $F(x)$ abbia tutti i suoi coefficienti di ugual segno (positivi) perchè tale possibilità sia esclusa.

Finora dunque risulta che, se $F(x)$ ha tutti i coefficienti di ugual segno, ciò è *sufficiente* perchè le radici reali e le parti reali delle radici complesse di $f(x) = 0$ siano negative. Ma ciò è anche *necessario*, perchè, se $F(x) = 0$ avesse i coefficienti non tutti di ugual segno, allora dovrebbe avere qualche radice positiva o nulla, o almeno qualche radice complessa con parte reale positiva o nulla (per l'osservazione già due volte esposta); ma queste non potrebbero essere che semisomme di radici positive o nulle o di radici con parte reale positiva o nulla di $f(x) = 0$.

Riassumendo, noi possiamo enunciare un teorema, teoricamente molto semplice, cioè:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione a coefficienti reali

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

abbia soltanto negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che essa abbia tutti i coefficienti diversi da zero e di ugual segno, e che l'equazione alle semisomme abbia anch'essa tutti i coefficienti diversi da zero e di ugual segno.

4. L'equazione alle semisomme ci può dare alcuni criterî, che, pur non avendo molta eleganza teorica, servono assai efficacemente nelle questioni applicative. Il problema di Hurwitz serve essenzialmente in pratica per le considerazioni seguenti:

Se

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \tag{4}$$

è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, il suo integrale generale è

$$y = P_1(t)\, e^{\beta_1 t} + P_2(t)\, e^{\beta_2 t} + \cdots + P_\nu(t)\, e^{\beta_\nu t}, \tag{5}$$

dove le β sono le radici *diverse* dell'equazione caratteristica

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

e $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_\nu(t)$ sono polinomî che hanno i gradi inferiori di 1 all'ordine di multiplicità delle rispettive radici β.

Noi diremo, per visibili riferimenti a questioni di meccanica [1], che l'espressione (5) costituisce una soluzione *stabile* del problema che conduce a (4) quando le radici reali dell'equazione caratteristica sono tutte negative, e le parti reali delle radici complesse sono tutte negative. Ma la stabilità non lascia di essere piccola e praticamente spesso inutile [2] quando almeno una di queste grandezze negative è molto vicina a zero. Quasi altrettanto importante come la loro qualità di essere negative è la loro qualità di essere lontane dallo zero; infatti y, pur tendendo a zero per $t = \infty$, può, se le parti reali delle β sono vicine a zero, acquistare prima valori molto considerevoli.

Si presenta dunque la questione di sapere se, fra zero e un numero negativo fisso $-\lambda$, esistano radici reali o parti reali di radici di $f(x) = 0$. In caso che ciò avvenga, la trasformata $f(x-\lambda) = 0$ avrà qualche radice positiva o qualche parte reale positiva di radici complesse. Ora l'equazione alle semisomme di $f(x-\lambda) = 0$ è evidentemente la trasformata $F(x-\lambda) = 0$ dell'equazione alle semisomme di $f(x) = 0$. Calcolata $F(x) = 0$, resta poi agevole calcolare $F(x-\lambda) = 0$. Il segno dei coefficienti di $f(x-\lambda)$ e di $F(x-\lambda)$ permetterà di decidere, a norma del teorema del n. 3, se fra 0

(1) Cfr. la Dinamica del Routh.

(2) Per esempio, gli aeroplani tipo Wright, che hanno il timone anteriore poco o nulla inclinato sulla direzione del movimento, sono poco stabili o poco instabili l'una e l'altra qualità sono quasi equivalenti, perchè (senza una costante attenzione da parte dell'aviatore) equivalgono ad una scarsa sicurezza. Essi guadagnano, viceversa, in agilità quello che per dono in sicurezza.

e $-\lambda$ esistano o non esistano radici reali di $f(x) = 0$ o parti reali di radici complesse coniugate.

Tutto ciò riesce tanto più praticabile quanto più basso è il grado di $f(x)$; fortunatamente sono proprio le equazioni di grado piuttosto basso quelle che più ricorrono nelle questioni applicative. In un lavoro, che forse pubblicherò prossimamente, darò una tabella di equazioni alle semisomme, corrispondenti alle equazioni dei primi dieci gradi.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi alternativi sotto l'azione di correnti ad alta frequenza. Nuovo rivelatore di onde hertziane* (1). Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

Siano S_1 e S_2 (fig. 1) due spirali identiche fra di loro per dimensione e numero di spire, di cui l'una S_1 munita di un piccolo nucleo N_1 di materiale magnetico sezionato in modo che in esso non si possano produrre correnti indotte di Foucault (costituito, per esempio, da un piccolo fascio di

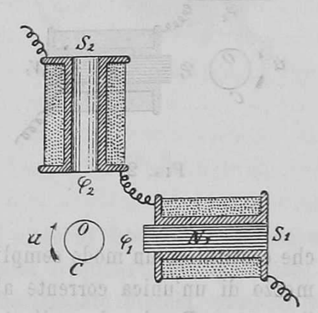

Fig. 1.

di fili sottili di ferro con vernice isolante); e l'altra spirale S_2 senza nucleo magnetico. Si dispongano le due bobine con i loro assi in direzioni normali, e — collegate fra di loro in serie — si facciano percorrere da una medesima corrente alternativa.

Per effetto dell'isteresi del materiale magnetico di cui è costituito il nucleo N_1, il flusso φ_1 generato dalla corrente percorrente la spirale S_1, presenta un determinato ritardo di fase rispetto al flusso φ_2 generato dalla stessa corrente percorrente la spirale S_2: e però i due campi magnetici al-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Istituto tecnico superiore di Milano.