ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

La stessa proprietà vale per il problema idrodinamico esterno.

Giova notare che — come mi fa gentilmente osservare il prof. Levi-Civita — se non si tenesse conto di condizioni ai limiti, si riconoscerebbe immediatamente che l'integrazione delle equazioni indefinite (7), (8) può farsi dipendere dall'integrazione dell'equazione indefinita (1). Basta infatti, per ogni integrale $\mathbf{s}$ della (1), introdurre una funzione φ tale che $\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{s}$, allora ponendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} - \operatorname{grad} \varphi \quad , \quad p_1 = -(k+1)\,\Delta\varphi\,,$$

le (7), (8) risultano soddisfatte.

Osservazione. — Anche la soluzione della doppia equazione di Laplace, che assume, colla sua derivata normale, dati valori al contorno, si può ottenere come caso particolare del problema elastico considerato nel n. 1: basta precisamente porre $\lambda = -1$, ovvero $k = -1$, come ho mostrato già una decina d'anni addietro [1]; in tal caso bisogna però aggiungere alla (1) la condizione $\Delta \operatorname{div} \mathbf{s} = 0$, che per $k \neq -1$ è conseguenza della (1). Infatti, ponendo $\mathbf{s} = \operatorname{grad} u$, ove u è una funzione da determinarsi, si ha $\operatorname{div} \mathbf{s} = \Delta u$, onde si conclude che u soddisfa alla doppia equazione di Laplace $\Delta\Delta u = 0$. Conoscendo poi $\mathbf{s}$ per i punti del contorno, risulterà nota (a meno di una costante) la u nei punti del contorno stesso, e poi anche la derivata normale di u, che vale $\mathbf{N} \times \mathbf{s}$.

Meccanica — *Sopra le correnti liquide spontanee* [2]. Nota di Umberto Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

Nella Nota precedente ho dato un esempio di effettiva esistenza di correnti liquide spontanee, immaginando che il moto liquido piano avvenga in una corona circolare e sia simmetrico rispetto al centro.

Nella presente Nota mi propongo di mostrare che l'esempio addotto rappresenta *l'unica soluzione* possibile che corrisponda ad una corrente spontanea *irrotazionale*, che si svolge in un campo anulare (del tipo « corona circolare » dal punto di vista della connessione).

1. Nel caso *irrotazionale* il problema è condotto alla ricerca di due linee libere λ e μ, e di una funzione $\Psi(x, y)$ (funzione di corrente), armonica nello spazio A compreso tra λ e μ (vedi la figura della Nota I), e tale che sia $\Psi = 0$ sopra λ e $\Psi = q$ sopra μ, e di più che il $\Delta_1 \Psi$

(1) Boggio, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*, n. 8, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV, 1899-1900. In questa Nota ho considerato solo il caso del piano, ma quelle considerazioni sono valide anche per lo spazio.

(2) Cfr. questi Rendiconti Nota I, pag. 10.

assuma un valore costante tanto su λ che su μ, eventualmente distinti tra loro.

Una tale funzione Ψ è legata alle componenti u e v della velocità, in un generico punto (x, y), dalla relazione differenziale

$$d\Psi = -v\,dx + u\,dy. \tag{1}$$

Essendo la Ψ armonica in A, si potrà definire (a meno di una costante additiva) la funzione associata φ (*potenziale di velocità*), mediante l'equazione ai differenziali totali

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy. \tag{2}$$

Posto

$$\begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\Psi = f, \end{cases} \tag{3}$$

w ed f riescono, com'è ben noto, funzioni della variabile complessa z, a causa delle (1) e (2); e le (1) e (2) stesse si compendiano nella relazione seguente:

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{4}$$

Chiamando V il valore assoluto della velocità, avremo

$$\mathrm{V} = |w| = \underset{1}{\Delta}\Psi = \underset{1}{\Delta}\varphi.$$

La V non va mai a zero e deve assumere valori costanti sopra λ e μ.

Prendiamo, ciò che è sempre lecito con opportuna scelta dell'unità di velocità,

$$\mathrm{V} = \begin{cases} 1 \quad \text{sopra } \lambda, \\ e^{\beta} \quad \text{sopra } \mu, \end{cases} \tag{5}$$

designando β una costante.

2. Introduciamo ora una funziono

$$\omega(z) = \vartheta + i\tau,$$

con ϑ e τ funzioni reali degli argomenti x e y, legata alla velocità w dalla relazione

$$w = e^{-i\omega}. \tag{6}$$

Essendo

$$V = |w| = e^{\tau},$$

le (5) esigono che sia

(7) $$\tau = \begin{cases} 0 \text{ sopra } \lambda , \\ \beta \text{ sopra } \mu , \end{cases}$$

essendo $\tau(x\,, y)$ armonica e ovunque regolare nel campo A.

Ciò posto prendiamo in esame i coefficienti dell'unità immaginaria i nelle funzioni $f(z)$ e $\frac{q}{\beta}\,\omega(z)$, cioè le due funzioni $\Psi(x\,,y)$ e $\frac{q}{\beta}\tau(x\,, y)$: entrambi sono armoniche e regolari in A e prendono al contorno $\lambda + \mu$ i medesimi valori 0 e q, ne segue

$$\Psi = \frac{q}{\beta}\tau \quad , \text{ in A}.$$

La identità della parti immaginarie delle funzioni $f(z)$ e $\frac{q}{\beta}\,\omega(z)$ porta come conseguenza la identità (a meno di una costante additiva) delle parti reali e quindi, a meno di una inessenziale costante reale, la identità delle funzioni stesse.

Dovremo avere così

(8) $$\omega(z) = \frac{\beta}{q}\,f(z)\,.$$

Quest'ultima unitamente alle (4) e (6), dà luogo all'equazione differenziale

$$\frac{dz}{df} = e^{\frac{\beta i}{q}f(z)}\,,$$

che integrata porge

(9) $$z - z_0 = -\,i\,\frac{q}{\beta}\,e^{\frac{\beta i}{q}f(z)}\,.$$

Da questa scende che le linee di flusso $\Psi =$ costante, tra le quali vi sono appunto le linee libere λ e μ, sono circonferenze concentriche.

Il che prova il nostro asserto.

Osservazione. — In particolare per $\beta = 0$, le linee di flusso divengono rette parallele; e per le (8) e (6) si ha $w = 1$. In tal caso la corrente liquida si riduce ad una traslazione uniforme, e di velocità unitaria, della porzione indefinita A di piano.