ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

dei perossidi; in altri invece danno lattoni che il Baeyer ammette derivino da un perossido formatosi in una prima fase:

$$\begin{array}{l} -\mathrm{C}:\mathrm{O}_2 \\ \;\;| \\ -\mathrm{CH}_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} -\mathrm{CO} \\ \quad\;\; >\mathrm{O} \\ -\mathrm{CH}_2 \end{array}$$

in questo caso, come si vede, *l'ossigeno si stacca dall'ossigeno* ed il Baeyer paragona giustamente questa trasformazione alla trasposizione di Beckmann che presentano le ossime:

$$\begin{array}{l} -\mathrm{C}:\mathrm{NOH} \\ \;\;| \\ -\mathrm{CH}_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} -\mathrm{CO} \\ \quad\;\; >\mathrm{NH} \\ -\mathrm{CH}_2 \end{array}$$

in cui *l'ossigeno si stacca dall'azoto*.

I composti dell'idrazina non vennero ancora studiati in questa direzione; ma fra i derivati dell'idrazina è noto che i fenilidrazoni perdono facilmente ammoniaca per dare indoli (sintesi di E. Fischer), che alcune tiosemicarbazidi, perdendo del pari ammoniaca, molto probabilmente in seguito ad una trasposizione analoga a quella di Beckmann, forniscono benzotiazoli [1], e che i derivati dell'idrazobenzolo hanno grande tendenza a trasformarsi in derivati della semidina:

$$\mathrm{C_6H_5 . NH . NH . C_6H_5} \longrightarrow \mathrm{C_6H_5 . NH . C_6H_4 . NH_2} .$$

In questi casi quindi *l'azoto si stacca dall'azoto*.

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili*. Nota di Enrico Bompiani, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Il problema di trovare tutte le funzioni permutabili con una data è stato ricondotto, dal prof. Volterra [2] all'altro di risolvere l'equazione integrale

$$(\mathrm{A}') \qquad \Psi(x\,,y) = \theta(u) - \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta-u\,,\xi)\, g_{12}(\xi\,,\zeta+u) - \\ - \Psi(\xi\,,\zeta+u)\, g_{21}(\zeta-u\,,\xi)]\, d\xi$$

ove

$$u = \frac{y-x}{2}\,, \quad v = \frac{y+x}{2} \qquad (0 \leq x \leq y \leq a)$$

e $\theta(u)$ è una funzione arbitraria che si annulla per $u = 0$.

[1] A. Hugershoff, Berliner Berichte 36 (1903), pag. 3134.

[2] Volterra, *Sopra le funzioni permutabili*. Rend. Acc. dei Lincei, § 2, aprile 1910.

Pur avendo data la soluzione completa di essa il prof. Volterra non accenna affatto al modo di giungervi; credo quindi non senza interesse mostrare come ciò possa farsi.

Osservo che $\Psi(x\,,x)=0$; ci si può quindi proporre la ricerca di

$$\lim_{y=x}\frac{\Psi(x\,,y)}{y-x}\ \text{(}^1\text{)}.$$

Poiche $\theta(0)=0$ si può scrivere

$$\frac{\Psi(x\,,y)}{y-x}=\frac{\theta(u)-\theta(0)}{2u}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_u^v\frac{d\zeta}{u}\left\{\int_{\zeta-u}^{\zeta+u}[\Psi(\zeta-u\,,\xi)\,g_{12}(\xi\,,\zeta+u)-\Psi(\xi\,,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\xi)]\,d\xi-\right.$$
$$\left.-\int_\zeta^\zeta[\Psi(\zeta\,,\xi)\,g_{12}(\xi\,,\zeta)-\Psi(\xi\,,\zeta)\,g_{21}(\zeta\,,\xi)]\right\}d\xi\,;$$

quindi:

$$\lim_{y=x}\frac{\Psi(x\,,y)}{y-x}=\tfrac{1}{2}\left\}\theta'(u)\right\{_{u=0}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_0^x d\zeta\left\{\frac{\partial}{\partial u}\int_{\zeta-u}^{\zeta+u}[\Psi(\zeta-u\,,\xi)\,g_{12}(\xi\,,\zeta+u)-\right.$$
$$\left.-\Psi(\xi\,,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\xi)]\,d\xi\right\}_{u=0}.$$

La derivazione indicata dell'ultimo integrale (²) dà:

$$\Psi(\zeta-u\,,\xi+u)\,g_{12}(\zeta+u\,,\zeta+u)-\Psi(\zeta+u\,,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\zeta+u)+$$
$$+\Psi(\zeta-u\,,\zeta-u)\,g_{12}(\zeta-u\,,\zeta+u)-\Psi(\zeta-u\,,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\zeta-u)-$$
$$-\int_{\zeta-u}^{\zeta+u}\frac{\partial}{\partial u}[\Psi(\zeta-u\,,\xi)\,g_{12}(\xi\,,\zeta+u)-\Psi(\xi\,,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\xi)]\,d\xi\,.$$

Per $u=0$ risulta tutto $=0$.

Se poniamo

$$\frac{d\,\theta(u)}{d(2u)}=\psi(u)$$

si ha

$$\lim_{y=x}\frac{\Psi(x\,,y)}{y-x}=\psi(0)=\text{costante}\ \text{(}^3\text{)}$$

e

$$\theta(u)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\,d\eta\,.$$

(¹) Il prof. Volterra fa ciò servendosi della soluzione già trovata.

(²) Intendiamo naturalmente che la Ψ e le g siano tali da rendere legittime le operazioni indicate.

(³) Loc. cit., § 3, n. 8.

Avuta così la forma di θ, basta, per trovare il risultato procedere per approssimazioni successive. Posto intanto

$$\Psi(x\,,y) = \theta(u) = \int_0^{y-x} \psi(\eta)\, d\eta$$

e sostituendo nella (A′) si ha

$$\Psi(x\,,y) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\, d\eta - $$
$$- \int_u^v d\zeta \left\{ \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi \left[\int_0^{\xi-\zeta+u} \psi(\eta)\, d\eta \,.\, g_{12}(\xi\,, \zeta+u) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_0^{\zeta+u-\xi} \psi(\eta)\, d\eta \,.\, g_{21}(\zeta-u\,, \xi) \right] \right\}.$$

Invertendo l'ordine nelle ultime due integrazioni si ha:

$$\Psi(x\,,y) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\, d\eta - \int_u^v d\zeta \left\{ \int_0^{2u} \psi(\eta) \left[\int_{\eta+\zeta-u}^{\zeta+u} g_{12}(\xi\,, \zeta+u)\, d\xi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{\zeta-u}^{-\eta+\zeta+u} g_{21}(\zeta-u\,, \xi)\, d\xi \right] d\eta \right\}$$
$$= \int_0^{2u} \psi(\eta) \left\{ 1 + \int_u^v d\zeta \left[\int_{\zeta-u}^{-\eta+\zeta+u} g_{21}(\zeta-u\,, \xi)\, d\xi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{\eta+\zeta-u}^{\zeta+u} g_{12}(\xi\,, \zeta+u)\, d\xi \right] \right\} d\eta\,.$$

Nelle ultime due integrazioni cambiamo la variabile d'integrazione: nella prima in luogo di ξ prendiamo $\zeta+u-\xi$, e nella seconda $\zeta-u+\xi$; con ciò si ottiene

$$\Psi(x\,,y) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\,[\Psi_1 + \Psi_2]\, d\eta\,,$$

ove $\Psi_1 = 1$ e

$$\Psi_2(\eta\,|\,x\,,y) =$$
$$= \int_u^v d\zeta \int_\eta^{2u} \{ g_{21}(\zeta-u\,, \zeta+u-\xi) - g_{12}(\xi+\zeta-u\,, \zeta+u) \}\, d\xi\,.$$

L'epressione ottenuta di $\Psi(x\,,y)$ rappresenta una seconda approssimazione: se ne otterrà una ulteriore sostituendo quest'espressione nella (A′) e operando c. s.; il nuovo termine di $\Psi(x\,,y)$ ci sarà dato da

$$- \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi \left[\int_0^{\xi-\zeta+u} \psi(\eta)\, \Psi_2(\eta\,|\,\zeta-u\,, \xi)\, d\eta \,.\, g_{12}(\xi\,, \zeta+u) - \right.$$
$$\left. - \int_0^{\zeta+u-\xi} \psi(\eta)\, \Psi_2(\eta\,|\,\xi\,, \zeta+u)\, d\eta \,.\, g_{21}(\zeta-u\,, \xi) \right].$$

Con l'inversione e le sostituzioni prima indicate si riconosce che esso può scriversi

$$\int_0^{2u}\psi(\eta)\,d\eta\int_u^v d\zeta\int_\eta^{2u}[\Psi_2(\eta\,|\,\zeta+u-\xi\,,\,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\,\zeta+u-\xi)-$$
$$-\Psi_2(\eta\,|\,\zeta-u\,,\,\xi+\zeta-u)\,g_{12}(\xi+\zeta-u\,,\,\zeta+u)]\,d\xi\,.$$

Posto quindi

$$\Psi_3(\eta\,|\,x\,,\,y)=\int_u^v d\zeta\int_\eta^{2u}[\Psi_2(\eta\,|\,\zeta+u-\xi\,,\,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\,\zeta+u-\xi)-$$
$$-\Psi_2(\eta\,|\,\zeta-u\,,\,\xi+\zeta-u)\,g_{12}(\xi+\zeta-u\,,\,\zeta+u)]\,d\xi\,,$$

si ha il nuovo valore approssimato di Ψ,

$$\Psi(x\,,\,y)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\,.\sum_1^3\Psi_h(\eta|\,x\,,\,y)\,.\,d\eta\,.$$

Così procedendo, l'operazione

$$-\int_u^v d\zeta\int_{\zeta-u}^{\zeta+u}d\xi\Bigg[\int_0^{\xi-\zeta+u}\psi(\eta)\,\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta-u\,,\,\xi)\,d\eta\,.\,g_{12}(\xi\,,\,\zeta+u)-$$
$$-\int_0^{\zeta+u-\xi}\psi(\eta)\,\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\xi\,,\,\zeta+u)\,d\eta\,.\,g_{21}(\zeta-u\,,\,\xi)\Bigg]$$

applicata al termine Ψ_{n-1} che caratterizza la $(n-1)$-esima approssimazione, dà origine al termine

$$\int_0^{2u}\Psi(\eta)\,d\eta\,.\int_u^v d\zeta\int_\eta^{2u}[\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta+u-\xi\,,\,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\,\zeta+u-\xi)-$$
$$-\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta-u\,,\,\xi+\zeta-u)\,g_{12}(\xi+\zeta-u\,,\,\zeta+u)]\,d\xi\,.$$

Si passa dunque dal valore di $\Psi(x\,,\,y)$ ottenuto con la $(n-1)$-esima approssimazione a quello dato dalla n-esima mutando la somma

$$\sum_1^{n-1}\Psi_h(\eta\,|\,x\,,\,y)\quad\text{in}\quad\sum_1^{n}\Psi_h(\eta\,|\,x\,,\,y)$$

ove

$$\Psi_n(\eta\,|\,x\,,\,y)=\int_u^v d\zeta\int_\eta^{2u}[\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta+u-\xi\,,\,\zeta+u)\,g_{21}(\zeta-u\,,\,\zeta+u-\xi)-$$
$$-\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta-u\,,\,\xi+\zeta-u)\,g_{12}(\xi+\zeta-u\,,\,\zeta+u)\,d\xi\,.$$

Che la serie

$$\sum_1^{\infty}\Psi_h(\eta|\,x\,,\,y)\,,$$

i cui termini sono ottenuti con l'operazione ricorrente ora indicata, converga; e che

$$\Psi(x\,,\,y)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\sum_1^{\infty}\Psi_n(\eta\,|\,x\,,\,y)\,d\eta$$

soddisfaccia effettivamente alla (A'), ha già mostrato il prof. Volterra.