

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

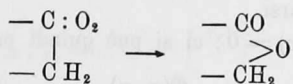


ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

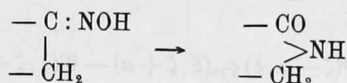
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

dei perossidi; in altri invece danno lattoni che il Baeyer ammette derivino da un perossido formatosi in una prima fase:



in questo caso, come si vede, *l'ossigeno si stacca dall'ossigeno* ed il Baeyer paragona giustamente questa trasformazione alla trasposizione di Beckmann che presentano le ossime:



in cui *l'ossigeno si stacca dall'azoto*.

I composti dell'idrazina non vennero ancora studiati in questa direzione; ma fra i derivati dell'idrazina è noto che i fenilidrazoni perdono facilmente ammoniaca per dare indoli (sintesi di E. Fischer), che alcune tiosemicarbazidi, perdendo del pari ammoniaca, molto probabilmente in seguito ad una trasposizione analoga a quella di Beckmann, forniscono benzotiazoli ⁽¹⁾, e che i derivati dell'idrazobenzolo hanno grande tendenza a trasformarsi in derivati della semidina:



In questi casi quindi *l'azoto si stacca dall'azoto*.

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili*. Nota di ENRICO BOMPIANI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Il problema di trovare tutte le funzioni permutabili con una data è stato ricondotto, dal prof. Volterra ⁽²⁾ all'altro di risolvere l'equazione integrale

$$(A') \quad \Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v d\xi \int_{\xi-u}^{\xi+u} [\Psi(\xi-u, \xi) g_{12}(\xi, \xi+u) - \Psi(\xi, \xi+u) g_{21}(\xi-u, \xi)] d\xi$$

ove

$$u = \frac{y-x}{2}, \quad v = \frac{y+x}{2} \quad (0 \leq x \leq y \leq a)$$

e $\theta(u)$ è una funzione arbitraria che si annulla per $u = 0$.

⁽¹⁾ A. Hugerhoff, Berliner Berichte 36 (1903), pag. 3134.

⁽²⁾ Volterra, *Sopra le funzioni permutabili*. Rend. Acc. dei Lincei, § 2, aprile 1910.

Pur avendo data la soluzione completa di essa il prof. Volterra non accenna affatto al modo di giungervi; credo quindi non senza interesse mostrare come ciò possa farsi.

Osservo che $\Psi(x, x) = 0$; ci si può quindi proporre la ricerca di

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{y-x} \quad (1).$$

Poiché $\theta(0) = 0$ si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(x, y)}{y-x} &= \frac{\theta(u) - \theta(0)}{2u} - \\ &- \frac{1}{2} \int_u^v \frac{d\xi}{u} \left\{ \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta-u, \xi) g_{12}(\xi, \zeta+u) - \Psi(\xi, \zeta+u) g_{21}(\zeta-u, \xi)] d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\zeta}^{\zeta} [\Psi(\zeta, \xi) g_{12}(\xi, \zeta) - \Psi(\xi, \zeta) g_{21}(\zeta, \xi)] d\xi \right\} d\xi; \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{y-x} &= \frac{1}{2} \theta'(u) \Big|_{u=0} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta-u, \xi) g_{12}(\xi, \zeta+u) - \right. \\ &\quad \left. - \Psi(\xi, \zeta+u) g_{21}(\zeta-u, \xi)] d\xi \right\}_{u=0}. \end{aligned}$$

La derivazione indicata dell'ultimo integrale (2) dà:

$$\begin{aligned} &\Psi(\zeta-u, \xi+u) g_{12}(\xi+u, \zeta+u) - \Psi(\zeta+u, \zeta+u) g_{21}(\zeta-u, \zeta+u) + \\ &+ \Psi(\zeta-u, \zeta-u) g_{12}(\zeta-u, \zeta+u) - \Psi(\zeta-u, \zeta+u) g_{21}(\zeta-u, \zeta-u) - \\ &- \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} \frac{\partial}{\partial u} [\Psi(\zeta-u, \xi) g_{12}(\xi, \zeta+u) - \Psi(\xi, \zeta+u) g_{21}(\zeta-u, \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Per $u=0$ risulta tutto = 0.

Se poniamo

$$\frac{d\theta(u)}{d(2u)} = \psi(u)$$

si ha

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{y-x} = \psi(0) = \text{costante} \quad (3)$$

e

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \psi(\eta) d\eta.$$

(1) Il prof. Volterra fa ciò servendosi della soluzione già trovata.

(2) Intendiamo naturalmente che la Ψ e le g siano tali da rendere legittime le operazioni indicate.

(3) Loc. cit., § 3, n. 8.

Avuta così la forma di θ , basta, per trovare il risultato procedere per approssimazioni successive. Posto intanto

$$\Psi(x, y) = \theta(u) = \int_0^{y-x} \psi(\eta) d\eta$$

e sostituendo nella (A') si ha

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \int_0^{2u} \psi(\eta) d\eta - \\ & - \int_u^v d\xi \left\{ \int_{\xi-u}^{\xi+u} d\xi \left[\int_0^{\xi-\xi+u} \psi(\eta) d\eta \cdot g_{12}(\xi, \xi+u) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^{\xi+u-\xi} \psi(\eta) d\eta \cdot g_{21}(\xi-u, \xi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Invertendo l'ordine nelle ultime due integrazioni si ha:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \int_0^{2u} \psi(\eta) d\eta - \int_u^v d\xi \left\{ \int_0^{2u} \psi(\eta) \left[\int_{\eta+\xi-u}^{\xi+u} g_{12}(\xi, \xi+u) d\xi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\xi-u}^{-\eta+\xi+u} g_{21}(\xi-u, \xi) d\xi \right] d\eta \right\} \\ = & \int_0^{2u} \psi(\eta) \left\{ 1 + \int_u^v d\xi \left[\int_{\xi-u}^{-\eta+\xi+u} g_{21}(\xi-u, \xi) d\xi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\eta+\xi-u}^{\xi+u} g_{12}(\xi, \xi+u) d\xi \right] \right\} d\eta. \end{aligned}$$

Nelle ultime due integrazioni cambiamo la variabile d'integrazione: nella prima in luogo di ξ prendiamo $\xi+u-\xi$, e nella seconda $\xi-u+\xi$; con ciò si ottiene

$$\Psi(x, y) = \int_0^{2u} \psi(\eta) [\Psi_1 + \Psi_2] d\eta,$$

ove $\Psi_1 = 1$ e

$$\begin{aligned} \Psi_2(\eta | x, y) = \\ = \int_u^v d\xi \int_{\eta}^{2u} \{ g_{21}(\xi-u, \xi+u-\xi) - g_{12}(\xi+\xi-u, \xi+u) \} d\xi. \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta di $\Psi(x, y)$ rappresenta una seconda approssimazione: se ne otterrà una ulteriore sostituendo quest'espressione nella (A') e operando c. s.; il nuovo termine di $\Psi(x, y)$ ci sarà dato da

$$\begin{aligned} - \int_u^v d\xi \int_{\xi-u}^{\xi+u} d\xi \left[\int_0^{\xi-\xi+u} \psi(\eta) \Psi_2(\eta | \xi-u, \xi) d\eta \cdot g_{12}(\xi, \xi+u) - \right. \\ \left. - \int_0^{\xi+u-\xi} \psi(\eta) \Psi_2(\eta | \xi, \xi+u) d\eta \cdot g_{21}(\xi-u, \xi) \right]. \end{aligned}$$

Con l'inversione e le sostituzioni prima indicate si riconosce che esso può scriversi

$$\int_0^{2u} \psi(\eta) d\eta \int_u^v d\xi \int_\eta^{2u} [\Psi_2(\eta|\xi + u - \xi, \xi + u) g_{21}(\xi - u, \xi + u - \xi) - \Psi_2(\eta|\xi - u, \xi + \xi - u) g_{12}(\xi + \xi - u, \xi + u)] d\xi.$$

Posto quindi

$$\Psi_3(\eta|x, y) = \int_u^v d\xi \int_\eta^{2u} [\Psi_2(\eta|\xi + u - \xi, \xi + u) g_{21}(\xi - u, \xi + u - \xi) - \Psi_2(\eta|\xi - u, \xi + \xi - u) g_{12}(\xi + \xi - u, \xi + u)] d\xi,$$

si ha il nuovo valore approssimato di Ψ ,

$$\Psi(x, y) = \int_0^{2u} \psi(\eta) \cdot \sum_1^3 \Psi_h(\eta|x, y) \cdot d\eta.$$

Così procedendo, l'operazione

$$- \int_u^v d\xi \int_{\xi-u}^{\xi+u} d\xi \left[\int_0^{\xi-\xi+u} \psi(\eta) \Psi_{n-1}(\eta|\xi - u, \xi) d\eta \cdot g_{12}(\xi, \xi + u) - \int_0^{\xi+u-\xi} \psi(\eta) \Psi_{n-1}(\eta|\xi, \xi + u) d\eta \cdot g_{21}(\xi - u, \xi) \right]$$

applicata al termine Ψ_{n-1} che caratterizza la $(n-1)$ -esima approssimazione, dà origine al termine

$$\int_0^{2u} \Psi(\eta) d\eta \cdot \int_u^v d\xi \int_\eta^{2u} [\Psi_{n-1}(\eta|\xi + u - \xi, \xi + u) g_{21}(\xi - u, \xi + u - \xi) - \Psi_{n-1}(\eta|\xi - u, \xi + \xi - u) g_{12}(\xi + \xi - u, \xi + u)] d\xi.$$

Si passa dunque dal valore di $\Psi(x, y)$ ottenuto con la $(n-1)$ -esima approssimazione a quello dato dalla n -esima mutando la somma

$$\sum_1^{n-1} \Psi_h(\eta|x, y) \quad \text{in} \quad \sum_1^n \Psi_h(\eta|x, y)$$

ove

$$\Psi_n(\eta|x, y) = \int_u^v d\xi \int_\eta^{2u} [\Psi_{n-1}(\eta|\xi + u - \xi, \xi + u) g_{21}(\xi - u, \xi + u - \xi) - \Psi_{n-1}(\eta|\xi - u, \xi + \xi - u) g_{12}(\xi + \xi - u, \xi + u)] d\xi.$$

Che la serie

$$\sum_1^\infty \Psi_h(\eta|x, y),$$

i cui termini sono ottenuti con l'operazione ricorrente ora indicata, converga; e che

$$\Psi(x, y) = \int_0^{2u} \psi(\eta) \sum_1^\infty \Psi_n(\eta|x, y) d\eta$$

soddisfaccia effettivamente alla (A'), ha già mostrato il prof. Volterra.