ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Della convergenza uniforme ordinaria.* Nota del prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA, presentata dal Corrispondente RICCI.

La presente Nota ha per oggetto di stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione di funzioni continue convergente in un intervallo (a, b) sia, in un punto x di (a, b), uniformemente convergente, e dimostrare la seguente proprietà: « I punti singolari rispetto alla convergenza uniforme ordinaria costituiscono un insieme di prima categoria ».

1. Sia

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \tag{1}$$

una successione di funzioni reali della variabile reale x, convergente nell'intervallo (a, b): $f(x)$ la funzione limite.

Def.ne — Si dirà che nel punto x di (a, b) la successione presenta il carattere della convergenza uniforme ordinaria, o, più brevemente, che *la successione converge uniformemente nel punto* x allorquando, assegnato ad arbitrio il numero reale e positivo σ, esiste un intorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del punto x nei punti ξ del quale si ha

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \sigma$$

da un certo valore dell'indice n in poi. I punti di (a, b) che non presentano questo carattere si diranno *singolari rispetto alla convergenza uniforme ordinaria.*

Si dimostra facilmente il

Teorema 1°. — « Se una successione

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

« di funzioni reali della variabile reale x è uniformemente convergente in « ogni punto x dell'intervallo (a, b), essa converge uniformemente in (a, b) ».

Fissato un σ reale e positivo, il minimo valore di n a partire dal quale è verificata la disuguaglianza

$$|f_n(x) - f(x)| < \sigma,$$

è funzione completamente determinata di x. Esiste, per ipotesi, un intorno del punto x in cui essa assume un valore massimo e perciò essa gode della stessa proprietà nell'intervallo (a, b) (¹).

Se le funzioni (1) sono *continue* e la successione converge uniformemente nel punto x, possiamo asserire che la funzione limite $f(x)$ è continua in questo punto (²). Ciò posto, dimostreremo il

Teorema 2°. — « Affinchè una successione

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

« di funzioni continue convergente nell'intervallo (a, b), sia nel punto x « di (a, b) uniformemente convergente, è necessario e basta che nel punto « stesso si abbia $\Omega(x) = 0$ » (³).

Sia la successione uniformemente convergente nel punto x. Assegnato σ, esiste in questa ipotesi un intorno $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ di x nei punti ξ del quale si ha

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\sigma}{4} \tag{2}$$

da un certo valore m dell'indice n in poi.

Per la continuità di $f(x)$ nel punto x esiste un intorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$ in ogni punto ξ del quale

$$|f(\xi) - f(x)| < \frac{\sigma}{4}. \tag{3}$$

Indicando con ε il minore dei due numeri ε_1 ed ε_2, nell'intorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ valgono ad un tempo le (2) e (3) e quindi la

$$|f_n(\xi) - f(x)| < \frac{\sigma}{2},$$

che si può scrivere anche così

$$f(x) - \frac{\sigma}{2} < f_n(\xi) < f(x) + \frac{\sigma}{2},$$

(¹) C. A. Dell'Agnola. *Sopra alcune proposizioni fondamentali dell'Analisi.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XL, 1907, pag. 369; pp. 372-373.

(²) C. Arzelà, *Sulle serie di funzioni.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, parte prima, 1899, pp. 14-17.

(³) La funzione $\Omega(x)$ è definita nella mia Nota: *Sulle funzioni egualmente continue.* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1910 (in corso di stampa). Fra le proprietà di questa funzione ricordo qui le seguenti: « L'annullarsi di $\Omega(x)$ nel punto x è condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots \infty)$, siano in questo punto egualmente continue. L'annullarsi identicamente di $\Omega(x)$ nell'intervallo (a, b), è condizione necessaria e sufficiente per l'eguale continuità della successione in (a, b) ».

valevole per $n \geqq m$. Segue tosto da questa successivamente

$$\Omega_n(x, \varepsilon) < \sigma$$
$$\Omega(x, \varepsilon) \leq \sigma$$
$$\Omega(x) \leq \sigma .$$

Quest'ultima essendo valida per quanto piccolo sia σ, si può concludere che $\Omega(x) = 0$.

Reciprocamente: si supponga $\Omega(x) = 0$ nel punto x di (a, b).

Fissato arbitrariamente il numero reale e positivo σ, si ha per la convergenza della successione

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\sigma}{3} \tag{4}$$

da un certo valore m dell'indice n in poi.

Poichè $\Omega(x) = 0$, le funzioni

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

sono egualmente continue nel punto x e quindi esiste un intorno c_x del punto x nei punti ξ del quale

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| < \frac{\sigma}{3}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, \ldots \infty). \tag{5}$$

Infine avendosi $\lim\limits_{n=\infty} \{f_n(x) - f_n(\xi)\} = f(x) - f(\xi)$, assieme alla (5) sussiste la

$$|f(\xi) - f(x)| \leq \frac{\sigma}{3}$$

Da questa e dalle (4) e (5) segue

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \sigma$$

valevole in ogni punto ξ di c_x e per $n \geq m$.

Dai teoremi precedenti scende il

Corollario 1°. — « Affinchè una successione di funzioni continue

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

« convergente nell'intervallo (a, b) converga ivi uniformemente, è necessario « e basta che si abbia identicamente in (a, b) $\Omega(x) = 0$ » (¹).

Sempre nelle stesse ipotesi si ha dal teorema 2° il

Corollario 2°. — « Se x è un punto singolare rispetto alla con« vergenza uniforme ordinaria si ha $\Omega(x) > 0$. E reciprocamente ».

(¹) Cfr. Arzelà, loc. cit., pp. 43 e seg.

2. In un'altra Nota [1] ho dimostrato la proprietà seguente:

« Se una successione di funzioni continue è convergente in un intervallo (a, b), in ogni tratto (α, β) di (a, b) esistono punti in cui la successione converge uniformemente ».

Pel teorema 2° del § precedente possiamo enunciare questa proprietà come segue:

« L'insieme degli zeri della funzione $\Omega(x)$ è *denso* in tutto l'intervallo ».

Ciò posto, possiamo dimostrare il

Teorema « Se

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

« è una successione di funzioni continue convergente nell'intervallo (a, b), « i punti singolari rispetto alla convergenza uniforme ordinaria costituiscono « un insieme di prima categoria ».

Indichiamo con G questo insieme. Appartengono a G i punti di (a, b) in cui $\Omega(x) > 0$. Poichè $\Omega(x)$ è semi-continua superiormente [2], l'insieme dei punti di (a, b) nei quali $\Omega(x) \geq \alpha$, essendo α un numero positivo, è chiuso [3]. Esso *non può essere denso* in alcun intervallo (α, β) di (a, b), perchè altrimenti dovrebbe contenere tutti i punti di (α, β) e ciò sarebbe in contraddizione col teorema precedente. Ciò posto, sia

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$$

una successione di numeri reali, positivi e decrescenti avente per limite zero: G_n l'insieme dei punti di (a, b) nei quali $\Omega(x) \geq \sigma_n$, $(n = 1, 2, \dots, \infty)$. G_n, qualunque sia n, è un insieme non denso in (a, b). Si riconosce facilmente che ogni punto di G appartiene ad uno degli insiemi

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$$

e reciprocamente che ogni punto di G_n, qualunque sia n, appartiene a G. Si conclude che G è un insieme di prima categoria.

Osservazione 1ª. — È chiaro che i punti di discontinuità della funzione limite appartengono a G. Pel teorema di Baire [4] essi formano alla loro volta un insieme di prima categoria.

Osservazione 2ª. — Supponiamo che oltre alle funzioni

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

[1] *Sulla funzione limite di una successione di funzioni continue*. Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Sc. e Lett., serie II, vol. XLI, 1908, pp. 683-684.

[2] C. A. Dell'Agnola, *Sulle funzioni egualmente continue*, loc. cit.

[3] R. Baire, *Leçons sur les fonction discontinues*, Paris, Gauthier-Villars, 1905, pag. 73.

[4] R. Baire, loc. cit., 1905.

sia continua nell' intervallo (a, b) anche la funzione limite $f(x)$. Si sa che esiste in questa ipotesi nell' intervallo (a, b) la convergenza uniforme a tratti (teorema di Arzelà), ma, in generale, non ha luogo la convergenza uniforme ordinaria: ciò è dovuto precisamente alla presenza nell' intervallo di punti singolari rispetto a questa specie di convergenza, i quali, pel teorema dimostrato, formano un insieme di prima categoria.

Meccanica — *La flessione del supporto dei pendoli nelle determinazioni di gravità relativa.* Nota I di Giorgio Abetti e Corrado Cappello, presentata dal Socio E. Millosevich.

Chi ha seguito le determinazioni di gravità relativa eseguite coi pendoli Sterneck, avrà certamente notato, che diversi sono i metodi in uso per determinare la correzione da applicarsi alle durate di oscillazione dei pendoli, per ridurle a quelle che si avrebbero se i pendoli oscillassero su di un supporto assolutamente rigido.

La tendenza di abbandonare la mensola a muro quale fu ideata dallo Sterneck (mensola che, quando il muro sia sufficientemente stabile, offre buone garanzie di solidità), si spiega col fatto, che non sempre è possibile trovare dei muri così solidi da potervi attaccare con sicurezza il supporto dei pendoli, e che in ogni modo riesce difficile accertarsi che in tutte le stazioni i muri sieno di uguale solidità. I piccolissimi movimenti di natura accidentale o periodica delle pareti, sono stati chiaramente messi in evidenza coi sensibili sismografi che ora si posseggono e si capisce subito, che se la parete non è abbastanza spessa e sotto il livello del suolo, bastano i movimenti dell'aria e le differenze di temperatura giornaliere per produrre delle perturbazioni nel moto dei pendoli. Un altro inconveniente, intrinseco al metodo della mensola a muro, sta nel fatto che in tal caso il pendolo non oscilla in un ambiente d'aria omogeneo ed il muro colla temperatura ed umidità che gli sono proprie, e generalmente diverse da quelle dell'ambiente (1), può influenzare il moto del pendolo.

Il supporto indipendente dal muro e che si colloca allo stesso modo nelle diverse stazioni è costruito generalmente in maniera tale, che ad esso si possono sospendere due o più pendoli. Di tale tipo è l'apparecchio Sterneck-Stückrath, dell'Ufficio centrale di Meteorologia, cortesemente prestato dal Direttore prof. Luigi Palazzo, all'Istituto di Fisica terrestre di Napoli, e col quale il prof. Ciro Chistoni ha in animo di far eseguire una campagna gravimetrica a Napoli, sul Vesuvio e nelle regioni circumvesuviane. Il sup-

(1) A. Alessio, *Esperienze comparative sopra alcuni apparati gravimetrici* ecc. Pubblicazione provvisoria del R. Istituto Idrografico, pag. 111. Genova, 1909.