ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

sia continua nell'intervallo (a, b) anche la funzione limite $f(x)$. Si sa che esiste in questa ipotesi nell'intervallo (a, b) la convergenza uniforme a tratti (teorema di Arzelà), ma, in generale, non ha luogo la convergenza uniforme ordinaria: ciò è dovuto precisamente alla presenza nell'intervallo di punti singolari rispetto a questa specie di convergenza, i quali, pel teorema dimostrato, formano un insieme di prima categoria.

Meccanica — *La flessione del supporto dei pendoli nelle determinazioni di gravità relativa.* Nota I di Giorgio Abetti e Corrado Cappello, presentata dal Socio E. Millosevich.

Chi ha seguito le determinazioni di gravità relativa eseguite coi pendoli Sterneck, avrà certamente notato, che diversi sono i metodi in uso per determinare la correzione da applicarsi alle durate di oscillazione dei pendoli, per ridurle a quelle che si avrebbero se i pendoli oscillassero su di un supporto assolutamente rigido.

La tendenza di abbandonare la mensola a muro quale fu ideata dallo Sterneck (mensola che, quando il muro sia sufficientemente stabile, offre buone garanzie di solidità), si spiega col fatto, che non sempre è possibile trovare dei muri così solidi da potervi attaccare con sicurezza il supporto dei pendoli, e che in ogni modo riesce difficile accertarsi che in tutte le stazioni i muri sieno di uguale solidità. I piccolissimi movimenti di natura accidentale o periodica delle pareti, sono stati chiaramente messi in evidenza coi sensibili sismografi che ora si posseggono e si capisce subito, che se la parete non è abbastanza spessa e sotto il livello del suolo, bastano i movimenti dell'aria e le differenze di temperatura giornaliere per produrre delle perturbazioni nel moto dei pendoli. Un altro inconveniente, intrinseco al metodo della mensola a muro, sta nel fatto che in tal caso il pendolo non oscilla in un ambiente d'aria omogeneo ed il muro colla temperatura ed umidità che gli sono proprie, e generalmente diverse da quelle dell'ambiente [1], può influenzare il moto del pendolo.

Il supporto indipendente dal muro e che si colloca allo stesso modo nelle diverse stazioni è costruito generalmente in maniera tale, che ad esso si possono sospendere due o più pendoli. Di tale tipo è l'apparecchio Sterneck-Stückrath, dell'Ufficio centrale di Meteorologia, cortesemente prestato dal Direttore prof. Luigi Palazzo, all'Istituto di Fisica terrestre di Napoli, e col quale il prof. Ciro Chistoni ha in animo di far eseguire una campagna gravimetrica a Napoli, sul Vesuvio e nelle regioni circumvesuviane. Il sup-

[1] A. Alessio, *Esperienze comparative sopra alcuni apparati gravimetrici* ecc. Pubblicazione provvisoria del R. Istituto Idrografico, pag. 111. Genova, 1909.

porto è costituito da un tronco di cono di grossa lamiera di rame portante nella parte superiore un anello di metallo fuso, su cui sono poggiati i tre piedi dell'apparecchio pendolare, che si chiama anche « quadripendolo » perchè quattro sono i pendoli che si possono contemporaneamente sospendervi; questi sono protetti da una campana di bronzo munita di fori, chiusi da lastre, per la visione degli specchietti dei pendoli e del termometro. Il bordo inferiore del cono di rame si fissa e si ingessa al suolo. Il poter sospendere ad un tempo quattro pendoli, porta ad un notevole risparmio di tempo delle osservazioni, e alla possibilità di determinare la flessione del supporto col metodo dei due pendoli oscillanti simultaneamente sullo stesso supporto. Questo metodo, già usato da G. Lorenzoni e da C. von Orff nelle loro classiche misure di gravità assoluta, consiste nell'uso di un pendolo filare, il cui punto di sospensione è fissato all'estremità superiore del supporto, di modo che il pendolo filare è costretto di partecipare al movimento che il supporto assume a causa del moto del pendolo principale (il pendolo di reversione di Repsold nel caso delle misure citate) che si fa oscillare per le determinazioni di gravità. Il rapporto della amplitudine del pendolo filare a quella del pendolo principale, dà una misura diretta dell'aumentare della durata di oscillazione di questo a causa della oscillazione simultanea del supporto. Nella forma di supporto dei pendoli Sterneck a cui sopra è accennato e che fu ideata da M. Haid [1], il pendolo filare può essere convenientemente sostituito da uno dei pendoli Sterneck, che viene chiamato pendolo *mosso* in contrapposto all'altro, che si chiama pendolo *motore*. Questo, che è sospeso ad un asse parallelo a quello del pendolo mosso, incomincia il suo movimento per l'azione della gravità nell'istante in cui viene abbandonato a sè stesso in una determinata elongazione dell'ordine di grandezza di quelle che si usano per le determinazioni effettive di gravità; in questo istante medesimo il pendolo mosso partendo dalla sua posizione verticale di equilibrio si mette in moto per effetto del movimento comunicato al suo asse di sospensione dal movimento oscillatorio del primo pendolo attraverso il supporto.

Formole per il calcolo della correzione σ da applicarsi alle durate di oscillazione osservate per ridurle a quelle che si avrebbero se il supporto fosse perfettamente rigido, furono date, per questo caso speciale di due pendoli uguali, da parecchi geodeti, come per esempio dello stesso Haid, da R. Schumann, E. Borrass, Ph. Furtwängler; formole più o meno rigorose a seconda delle quantità trascurate nel calcolo.

M. Haid [2] partendo dall'equazione del secondo ordine data da v. Orff per il moto del pendolo filare ed introducendovi le opportune modificazioni pel caso di un pendolo rigido, di lunghezza uguale a quella del pendolo

[1] Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1896. Band 16, pag. 193.
[2] Astronomische Nachrichten. Bd. 143, pag 147. Kiel. 1897.

motore, e pel quale si può trascurare l'influenza della resistenza dell'aria, giunge per integrazione alla seguente espressione di λ_1, cioè dell'allungamento del pendolo motore in seguito all'oscillazione simultanea del supporto:

$$\lambda_1 = \frac{2(\alpha'_2 + \alpha'_1)}{\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}} \frac{s_1}{t_2 - t_1} \frac{l_1}{\pi}$$

dove i simboli s_1 ed l_1 indicano rispettivamente in secondi ed in metri, la durata di oscillazione e la lunghezza del pendolo motore, mentre α_1 ed α_2, α'_1 ed α'_2 indicano rispettivamente le amplitudini del pendolo motore e del pendolo mosso ai tempi t_1 e t_2.

Differenziando la nota relazione

$$s_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

rispetto ad l_1 e ad s_1 prese come variabili, mentre g, per un determinato luogo si ritiene costante, si ha:

$$ds_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{l_1 g}}\, dl_1\,,$$

poichè per i pendoli Sterneck è approssimativamente:

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{l_1 g}} = 0{,}998$$

ne segue, che con buona approssimazione si può ritenere $\lambda_1 = \sigma_1$ correzione della durata di oscillazione del pendolo motore per ridurla a supporto rigido. R. Schumann, E Borrass, Ph. Furtwängler (¹) partono da due equazioni differenziali del secondo ordine del tipo generale:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & l_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 l_1 \frac{d\varphi}{dt} + k_1 \frac{dx_1}{dt} + g\varphi = 0 \\ & l_2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 l_2 \frac{d\psi}{dt} + k_2 \frac{dx_2}{dt} + g\psi = 0 \end{aligned} \right.$$

dove φ e ψ rappresentano rispettivamente gli angoli compresi fra le posi-

(¹) R. Schumann, *Ueber die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Bestimmung der Mitschwingung.* Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 44, pag. 102. Leipzig, 1899; E. Borrass, *Bestimmung der Intensität der Schwerkraft...* Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geod. Institutes. Neue Folge, n. 9, pag. 87 e l'altra n. 23 a pag. 23. Berlin, 1902-05; Ph. Furtwängler, Sitzungsberichte der physik-mathem. Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften vom 27. Februar 1902, pag. 250.

zioni dei pendoli motore e mosso (di lunghezza l_1 ed l_2) al tempo t e le loro singole posizioni di equilibrio; x_1 ed x_2 rappresentano i movimenti dei coltelli e k_1, k_2 sono delle costanti dipendenti dall'attrito dei coltelli e dalla resistenza dell'aria.

Lo Schumann trascura i termini $k_1 \frac{dx_1}{dt}$ e $k_2 \frac{dx_2}{dt}$ e suppone

$$x_1(t) = x_2(t) = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi \tag{2}$$

dove λ_1 e λ_2 sono gli allungamenti che vengono a subire rispettivamente i due pendoli per effetto dell'oscillare simultaneo del supporto giacchè è chiaro che, come il pendolo motore influisce sul mosso, così avviene, ed in misura crescente fino ad un massimo, pel pendolo mosso rispetto al motore. Per giustificare questa supposizione basta integrare le equazioni differenziali del secondo ordine che rappresentano il moto del supporto e quello del pendolo, si trova allora per x_1 l'espressione [1]:

$$x_1 = \frac{\mathrm{Mg}\,h}{\varepsilon\, l_1}\varphi \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \frac{\mathrm{Mg}\,h}{\varepsilon\, l_1}$$

essendo M la massa del pendolo, h la distanza del centro di gravità dall'asse di rotazione del pendolo ed ε un coefficiente di elasticità; è quindi

$$x_1 = \text{costante} \cdot \varphi$$

essendo la costante proprio l'allungamento λ_1, che il pendolo subisce in causa del moto simultaneo del supporto. Poichè inoltre il supporto comune che sostiene i coltelli dei due pendoli è rigido, supponendo che i due coltelli abbiano molto prossimamente lo stesso movimento e gli impulsi prodotti dai pendoli sul supporto vengano a sovrapporsi si potrà scrivere la (2). Lo Schumann integrando le (1) arriva ad una semplice espressione di λ_1, che vale per il principio del movimento e che è della forma di quella dello Haid colla quale coincide per la durata di alcuni minuti dal principio della oscillazione del pendolo motore:

$$\lambda_1 = \frac{2\,l_1}{t}\,\frac{s_1}{\pi}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{3}$$

dove α_1 ed α_2 sono rispettivamente le amplitudini del pendolo motore e del pendolo mosso al tempo t.

Il Borrass ed il Furtwängler arrivano invece alla seguente formola più approssimata che vale anche per t abbastanza grande:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\frac{1}{2}\,(s_1 - s_2)\,\mathrm{cosec}\,\frac{\pi t}{s_1 s_2}\sqrt{\frac{(s_1 - s_2)^2}{4} + \sigma_1\,\sigma_2} \tag{4}$$

dove σ_2 analogamente a σ_1 rappresenta la correzione da applicarsi alla du-

[1] F. R. Helmert, *Beiträge zur Theorie des Reversionspendels*, Veröff. des Preuss. Geodät. Inst., 1898, pag. 70.

rata di oscillazione del pendolo mosso per ridurla a supporto rigido. Sviluppando secondo le potenze crescenti del tempo ed arrestando lo sviluppo al primo termine, ciò che si può fare se $s_1 - s_2$ è piccolo, si ha:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{s_1 s_2}{\pi t} \tag{5}$$

ed anche supponendo $s_1 = s_2 = s$:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{s^2}{\pi t} . \tag{5'}$$

La (3) si trasforma facilmente nella (5′) quando si noti che dalla equazione:

$$s_1^2 = \frac{\pi^2 L}{g}$$

dove è

$$L = l_1 + \lambda_1$$

e dalla:

$$s^2 = \frac{\pi^2 l_1}{g} \tag{6}$$

dove s è la durata di oscillazione corretta, cioè:

$$s = s_1 - \sigma_1$$

si ha:

$$s_1^2 = \frac{\pi^2 l_1}{g} + \frac{\pi^2 \lambda_1}{g} = (s_1 - \sigma_1)^2 + \frac{\pi^2 \lambda_1}{g}$$

e trascurando σ_1^2, che è una quantità piccolissima, si ha:

$$2 s_1 \sigma_1 = \frac{\pi^2 \lambda_1}{g}$$

da cui:

$$\lambda_1 = \frac{2 g\, s_1 \sigma_1}{\pi^2} ,$$

sostituendo questo valore nella (3) e ponendo per l_1 il suo valore dato dalla (6) si ha come si voleva la (5′).

Quindi, se la differenza $s_2 - s_1$ non è troppo grande, cioè nel caso pratico anche se questo arriva fino a 200 o 300 unità della 7ª cifra decimale, per un valore della flessione del supporto uguale a 70 od 80 unità della 7ª cifra decimale e per valori di t non superiori a 35 o 40 minuti dallo inizio del moto, si potrà far sempre uso della (5); ma anche se tale differenza, per i pendoli che si usano, fosse maggiore, si potrà sempre ridursi ad adoperare la (5) ponendo all'uopo sulla lente di uno dei due pendoli, un piccolo peso, in modo da portare la differenza delle due durate di oscillazione s_1 ed s_2 entro i limiti di applicabilità della (5). Già fu dimostrato sperimentalmente da A. Alessio (1) che la (4) non corrisponde al fenomeno fisico osservato, quindi sarà inutile usarla nella speranza di accrescere la precisione dei risultati. D'altra parte gli esperimenti di Haid, Schumann, Borrass ed Alessio, fatti aumentando a bella posta la flessione del supporto, col porre questo in condizioni più o meno instabili o cambiandolo addirittura, e paragonando fra di loro i risultati della osservazione diretta delle durate di oscillazione, coi risultati dati dalle formole qui riportate, provano, che nelle misure differenziali, per valori della flessione del supporto non troppo grandi, sarà sempre sufficiente l'uso della (5), accordando se è necessario, i due pendoli tra di loro. Naturalmente sarà anche bene che la flessione del supporto varii il minimo possibile da un luogo all'altro, ora, a parte le condizioni del suolo, che possono essere ben diverse e che l'osservatore non può modificare, ci pare che la disposizione di Haid sia quella che offre i migliori risultati e garanzie. Egli nelle sue misure (2) poneva il supporto dei pendoli su un piano di marmo alto pochi centimetri (7 cm.) che veniva ingessato sul suolo, ed ottenne così una flessione del supporto che portava in media ad una correzione nella durata di oscillazione dei pendoli di circa 10 o 12 unità della 7ª cifra decimale e che variava molto poco da stazione a stazione.

Con questo metodo, e proscrivendo l'uso di supporti come quelli costruiti dal meccanico Stückrath in cui i pendoli posano su mensoline che aggettano da una colonna centrale e che, come si capisce *a priori*, debbono inflettersi sotto il peso del pendolo, e scegliendo invece piatti di sostegno per i pendoli, analoghi a quello usato dall'Haid o a quello costruito nell'Istituto Idrografico (3), si dovrebbero rendere per quanto è possibile minime le cause di errore nel determinare questa correzione. Ad ogni modo sarebbe sempre consigliabile di fare nella stazione di base delle misure di controllo, od usando il metodo proposto da Alessio della determinazione diretta dei coefficienti di flessione o coll'osservare direttamente lo spostamento del supporto del pendolo.

Sui metodi che si possono adoperare per questo scopo si dirà in una Nota seguente.

(1) l. c., pag. 87.

(2) M. Haid, *Bestimmung der Intensität der Schwerkraft...* in Karlsruhe, Strassburg ecc. Centralbureau der internationalen Erdmessung. Veröff. Neue Folge n. 10. Berlin, 1904; ed anche: Astronomische Nachrichten, vol. 146, pag. 333.

(3) A. Alessio, l. c., tavola II.