ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sopra un'equazione integrale di prima specie a limiti variabili considerata da Volterra.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Meccanica — *Metodi proposti per la determinazione diretta della flessione del supporto dei pendoli gravimetrici.* Nota II di GIORGIO ABETTI e CORRADO CAPPELLO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *La superficie d'onda della luce in certi mezzi cristallini eterogenei.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO

1. In una precedente Nota inserita in questi Rendiconti [1] ho dato l'equazione differenziale della superficie d'onda della luce in un mezzo qualunque, e ne ho dedotto una formola per la velocità di propagazione che comprende quella data da Fresnel pe' mezzi omogenei.

Siano x, y, z delle coordinate ortogonali; sia

$$ds^2 = \xi^2\,dx^2 + \eta^2\,dy^2 + \zeta^2\,dz^2$$

il quadrato dell'elemento lineare, ed $S(t, x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie d'onda. Si ponga

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p_0\ ,\quad \frac{1}{\xi}\frac{\partial S}{\partial x} = p_1\ ,\quad \frac{1}{\eta}\frac{\partial S}{\partial y} = p_2\ ,\quad \frac{1}{\zeta}\frac{\partial S}{\partial z} = p_3\ ;$$

e siano $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ i semiassi dell'ellissoide di polarizzazione, diretti secondo le normali alle superficie $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$, $z = \text{cost}$. L'equazione differenziale della superficie d'onda in tal caso può scriversi

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - p_2^2 - p_3^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_1 p_2 & \frac{1}{b^2} - p_3^2 - p_1^2 & p_2 p_3 \\ p_1 p_3 & p_2 p_3 & \frac{1}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

[1] L. Giuganino. *Estensione d'una formola di Fresnel.* (Rend. Acc. Lincei (5), XIX, [1], 735, 1910).

od anche,

$$(2)\qquad \begin{aligned} &F(p_0, p_1, p_2, p_3) = \\ &= \frac{p_1^2}{p_0^2 - a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} + \frac{p_2^2}{p_0^2 - b^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} + \\ &+ \frac{p_3^2}{p_0^2 - c^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} = 0. \end{aligned}$$

2. Quando a, b, c sono costanti, e il mezzo trasparente è omogeneo, l'equazione (2) permette di ritrovare la ben nota superficie di Fresnel con tanta semplicità, che non sarà inutile esporre il calcolo per disteso. Se x, y, z sono coordinate cartesiane si ha una soluzione completa della (2) ponendo p_1, p_2, p_3 eguali a tre costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; allora, per la (2), anche p_0 sarà una costante, α_0; così la (2) diviene

$$(3)\qquad \begin{aligned} &F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 . \alpha_3) = \\ &= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2 - a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_0^2 - b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} + \\ &+ \frac{\alpha_3^2}{\alpha_0^2 - c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} = 0. \end{aligned}$$

L' integrale completo è

$$(4)\qquad \Sigma = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$

a meno d' una costante additiva.

Per un noto teorema di Jacobi l' integrale generale della (2) si ottiene sotto forma finita eguagliando a certe nuove costanti $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ le derivate parziali dell' integrale completo Σ rapporto alle costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. E, se per $t = 0$ la superficie d'onda si riduce al punto $x = y = z = 0$, deve essere $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 0$. Così

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\Sigma}{\partial\alpha_1} = x + t\frac{\partial\alpha_0}{\partial\alpha_1} = 0 \;,\; \frac{\partial\Sigma}{\partial\alpha_2} = y + t\frac{\partial\alpha_0}{\partial\alpha_2} = 0 \,, \\ &\frac{\partial\Sigma}{\partial\alpha_3} = z + t\frac{\partial\alpha_0}{\partial\alpha_3} = 0 . \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} K = &\left[\frac{a\alpha_1}{\alpha_0^2 - a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}\right]^2 + \left[\frac{b\alpha_2}{\alpha_0^2 - b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}\right]^2 + \\ &+ \left[\frac{c\alpha_3}{\alpha_0^2 - c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}\right]^2 , \end{aligned}$$

e sia h una conveniente costante di proporzionalità diversa da zero: le (5) divengono

$$(6)\quad \begin{aligned} ht = \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} = -2\alpha_0 \Bigg\{ &\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2 - a^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\right]^2 + \\ +\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_0^2 - b^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\right]^2 &+ \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_0^2 - c^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\right]^2 \Bigg\} \end{aligned}$$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} hx &= \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \frac{2\alpha_1}{\alpha_0^2 - a^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)} - 2K\alpha_1 , \\ hy &= \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \frac{2\alpha_2}{\alpha_0^2 - b^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)} - 2K\alpha_2 , \\ hz &= \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} = \frac{2\alpha_3}{\alpha_0^2 - c^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)} - 2K\alpha_3 . \end{aligned} \right.$$

Moltiplichiamo (6) e (7) per $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e sommiamo membro a membro: la somma dei secondi membri è

$$\alpha_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} = 0$$

pel teorema di Eulero sulle funzioni omogenee. Perciò sommando i primi membri si ha

$$(8)\qquad \Sigma = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0 ,$$

e, per la (3), la somma dei terzi membri delle (7) fornisce

$$(9)\qquad h\alpha_0 t = 2K(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) .$$

Eleviamo al quadrato i primi e terzi membri delle (7), e sommiamo, tenendo presenti le (3), (8), (9): si ha

$$h^2 r^2 = h^2(x^2+y^2+z^2) = -\frac{2ht}{\alpha_0} + 2Kh\alpha_0 t = -\frac{ht}{\alpha_0}(2 - 2K\alpha_0^2) ,$$

od anche

$$(10)\qquad 2 - 2K\alpha_0^2 = h\alpha_0 t \left(\frac{r}{t}\right)^2 .$$

Nelle (7) riduciamo ciascuno dei terzi membri a frazione unica, tenendo conto delle (9) e (10), e trasportiamo tutto nei primi membri: si ottiene facilmente

$$\frac{\frac{x}{t}}{\left(\frac{r}{t}\right)^2 - a^2} + \frac{\alpha_0\,\alpha_1}{\alpha_0^2 - a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} = 0\,,$$

$$(11)\qquad \frac{\frac{y}{t}}{\left(\frac{r}{t}\right)^2 - b^2} + \frac{\alpha_0\,\alpha_2}{\alpha_0^2 - b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} = 0\,,$$

$$\frac{\frac{z}{t}}{\left(\frac{r}{t}\right)^2 - c^2} + \frac{\alpha_0\,\alpha_3}{\alpha_0^2 - c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} = 0$$

Si moltiplichino le (11) per $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, le (6) per

$$-\frac{1}{ht}\,\frac{\alpha_0\,\alpha_1}{\alpha_0^2 - a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}\,,\quad -\frac{1}{ht}\,\frac{\alpha_0\,\alpha_2}{\alpha_0^2 - b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}\,,$$

$$-\frac{1}{ht}\,\frac{\alpha_0\,\alpha_3}{\alpha_0^2 - c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}\,,$$

indi se ne faccia la somma a membro a membro: si ha l'equazione della superficie d'onda al tempo t in coordinate cartesiane omogenee

$$(12)\qquad \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2}{\left(\frac{r}{t}\right)^2 - a^2} + \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{r}{t}\right)^2 - b^2} + \frac{\left(\frac{z}{t}\right)^2}{\left(\frac{r}{t}\right)^2 - c^2} = 1\,.$$

Le (7) esprimono che la (2) è l'equazione tangenziale della superficie d'onda in coordinate omogenee. Le (5) sono le traiettorie luminose, rettilinee, corrispondenti ad un'onda piana $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. I due integrali della (2), $\Sigma = 0$ ed $S = 0$, che si toccano nel punto $x = y = z = 0$, si toccano lungo tutta la traiettoria luminosa (5), che è una *caratteristica* della (2) uscente dal punto $x = y = z = 0$. Le (5) *dimostrano* che la superficie d'onda (12) è l'inviluppo delle onde piane (8) che al tempo $t = 0$ passano per l'origine.

3. Si ottengono superficie d'onda più generali che la (12) di Fresnel, supponendo a, b, c variabili da punto a punto. Le coordinate siano ancora cartesiane, ed a, b, c siano funzioni della sola z: ponendo p_0, p_1, p_2 eguali a certe tre costanti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ si ha immediatamente un integrale completo della (2) sotto la forma

$$\Sigma = \alpha_0\,t + \alpha_1\,x + \alpha_2\,y + \int_0^z \alpha_3\,dz\,,$$

ove α_3 è il valore di p_3 che si ottiene dalla (2) sostituendo p_0, p_1, p_2 con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

Se la superficie d'onda per $t=0$ si riduce al punto $x=y=z=0$, il teorema citato di Jacobi fornisce le equazioni finite

$$(13) \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_0} = t + \int_0^z \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_0}\, dz = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_1} = x + \int_0^z \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1}\, dz = 0 ;$$
$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_2} = y + \int_0^z \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_0}\, dz = 0 .$$

Si moltiplichino ordinatamente queste equazioni per $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, e se ne faccia la somma, ricordando che pel teorema di Eulero

$$\alpha_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} = 0 ;$$

viene

$$(14) \qquad \Sigma = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \int_0^z \alpha_3\, dz = 0 ;$$

e la superficie d'onda, S, al tempo t è l'inviluppo delle onde (14) che al tempo $t=0$ passano per l'origine delle coordinate. Anche in questo caso le traiettorie luminose sono le *caratteristiche* (13) uscenti dal punto $x=y=z=0$, e corrispondenti ai valori $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$; le superficie Σ ed S che si toccano nel punto $x=y=z=0$ si toccano lungo tutta la traiettoria luminosa corrispondente alla terna $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

Eliminando $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ fra le (13) si ottiene la superficie d'onda; ma la eliminazione effettiva diviene assai malagevole appena le a, b, c siano funzioni meno che semplici.

In questa Nota mi limiterò al caso che sia ovunque

$$a^2 = b^2 = \frac{1}{m_0 + m_1 z} \qquad c^2 = \frac{c_0^2}{m_0 + m_1 z},$$

posizioni che estendono la teoria del miraggio di Biot ai mezzi anisotropi uniassici.

4. Quando $a^2 = b^2$ l'equazione differenziale (1) si spezza nelle due seguenti:

$$(15) \qquad p_0^2 = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$
$$(16) \qquad p_0^2 = c^2(p_1^2 + p_2^2) + a^2 p_3^2 .$$

Ricordando ([1]) che la velocità di propagazione secondo la normale è

$$V = \frac{p_0}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},$$

([1]) L. Giuganino. *Estensione d'una formola di Fresnel* (Rend. R. Acc. Lincei (5), XIX, [1], 738, 1910).

si vede che la (15) è l'equazione differenziale della superficie d'onda corrispondente al raggio ordinario: scrivendo l'equazione finita della superficie d'onda sotto la forma

$$S(t\,,x\,,y\,,z)=\sqrt{2h}\,t-W(x\,,y\,,z)=0\,,$$

e ponendo $n=\frac{1}{a}$, la (15) diviene

$$-2hn^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=0\,.$$

Quest'equazione per $n^2=m_0+m_1z$ fu già studiata dal sig. Garbasso (¹). Lasciamo in disparte questo caso, e studiamo la superficie d'onda (16), che corrisponde al raggio straordinario. Si ha dalle (16) e (13)

$$\alpha_3=\sqrt{\alpha_0^2(m_0+m_1z)-c_0^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\,, \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&t+\frac{2}{3m_1}\left[m_0+m_1z-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}\right]^{\frac{3}{2}}+\\
&\qquad+\frac{2c_0}{m_1}\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}\sqrt{m_0+m_1z-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}}\\
&-\frac{2}{3m_1}\left[m_0\qquad-c_0\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}\right]^{\frac{3}{2}}-\\
&\qquad-\frac{2c_0}{m_1}\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\sqrt{m_0\qquad-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}}=0,\\
&x-\frac{2c_0^2}{m_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\sqrt{m_0+m_1z-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}}+\\
&\qquad+\frac{2c_0^2}{m_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\sqrt{m_0\qquad-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}}=0,\\
&y-\frac{2c_0^2}{m_1}\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\sqrt{m_0+m_1z-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}}+\\
&\qquad+\frac{2c_0^2}{m_1}\frac{\alpha^2}{\alpha_0}\sqrt{m_0\qquad-c_0^2\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_0^2}}=0.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Le ultime due equazioni mostrano che le traiettorie luminose sono parabole con l'asse verticale, come già aveva trovato Biot pel raggio ordinario. Per avere la sezione meridiana della superficie d'onda basta fare, nelle (18),

(¹) A. Garbasso. *Traiettorie e onde luminose ecc.* (Rend. R. Acc. Lincei (5), XVI, [2], 518, 1907).

$\alpha_2 = 0$, ed eliminare $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$. Per brevità si ponga

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \alpha\,;$$

$$m_0 + m_1 z - c_0^2 \alpha^2 = \beta^2 \tag{19}$$

$$m_0 \qquad\quad - c_0^2 \alpha^2 = \gamma^2 \tag{20}$$

e le (18) divengono

$$t + \frac{2}{3m_1}(\beta^3 - \gamma^3) + \frac{2c_0^2}{m_1}\alpha^2(\beta - \gamma) = 0 \tag{21}$$

$$x = \frac{2c_0^2}{m_1}\alpha(\beta - \gamma) = 0\,. \tag{22}$$

Da quest'ultima equazione

$$\beta - \gamma = \frac{m_1}{2c_0^2}\frac{x}{\alpha}\,. \tag{23}$$

Dalle (19) e (20) si ha

$$\beta^2 - \gamma^2 = m_1 z \tag{24}$$

che divisa per la (23) fornisce

$$\beta + \gamma = 2c_0^2 z \frac{\alpha}{x}\,. \tag{25}$$

Dalle (23) e (25) si ricava

$$\left\{\begin{aligned} \beta &= c_0^2 z \frac{\alpha}{x} + \frac{m_1}{4c_0^2}\frac{x}{\alpha} \\ \gamma &= c_0^2 z \frac{\alpha}{x} - \frac{m_1}{4c_0^2}\frac{x}{\alpha}\,. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Nelle (21) e (20) si pongano per $\beta\,, \gamma\,, \beta - \gamma$ i valori (26) e (23); liberando dai denominatori si ha rispettivamente

$$48\,c_0^6(c_0^2 z^2 + x^2)\,\alpha^4 + 48\,c_0^6\,tx\,\alpha^3 + m_1^2 x^4 = 0 \tag{27}$$

$$16\,c_0^6(c_0^2 z^2 + x^2)\,\alpha^4 - 8\,c_0^4(2m_0 + m_1 z)\,x^2\alpha^2 + m_1^2 x^4 = 0\,. \tag{28}$$

Sottraendo (28) da (27) e dividendo per $8\,c_0^4\alpha^2$, che è generalmente $\neq 0$, si ha

$$4\,c_0^2(c_0^2 z^2 + x^2)\,\alpha^2 + 6\,c_0^2\,tx\alpha + (2m_0 + m_1 z)\,x^2 = 0 \tag{29}$$

e da questa si ottiene

$$16\,c_0^4(c_0^2 z^2 + x^2)^2\alpha^4 + [8\,c_0^2(2m_0 + m_1 z)\,(c_0^2 z^2 + x^2) - 36\,c_0^4 t^2]\,x^2\alpha^2 + (2m_0 + m_1 z)^2 x^4 = 0\,. \tag{30}$$

L'equazione della superficie d'onda è il risultante delle equazioni (28) e (30), biquadratiche in α: indicandole per brevità con

$$A\alpha^4 + B\alpha^2 + C = 0$$
$$A'\alpha^4 + B'\alpha^2 + C' = 0$$

tale risultante è

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}^2 = 0. \tag{31}$$

Siccome $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, ed $\frac{\alpha_3}{\alpha_0}$ sono proporzionali ai coseni direttori della normale a $\Sigma = 0$, ed $S = 0$, si può ritenere che α sia sempre finito: perciò se $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0$, dev'essere pure $\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} = 0$. Quest'ultima relazione rappresenta una parabola fissa (oltre ad una retta quadrupla $x^4 = 0$, ed una coppia ellittica di rette $c_0^2 z^2 + x^2 = 0$); e si vedrebbe facilmente che tale parabola è l'inviluppo delle traiettorie paraboliche (18).

Nella (31) sopprimiamo il fattore comune $2^8 c_0^6 (c_0^2 z^2 + x^2) x^8$; moltiplichiamo il primo e terzo determinante per m_1^2 a fine di rendere più simmetrica l'espressione. Sviluppando viene:

$$\begin{aligned}
&[-9c_0^4 m_1^2 t^2 + 4c_0^2 m_1^2 (2m_0 + m_1 z)(c_0^2 z^2 + x^2)] \times \\
\times &[9c_0^4 m_1^2 t^2 - 2c_0^4 (m_0 + m_1 z)^3 + 2c_0^2 m_1^2 (2m_0 + m_1 z)(c_0^2 z^2 + x^2)] - \\
&- c_0^2 m_1^2 (c_0^2 z^2 + x^2)[c_0^2 (2m_0 + m_1 z)^2 - m_1^2 (c_0^2 z^2 + x^2)]^2 = 0.
\end{aligned}$$

In questa espressione i due fattori del prodotto sono la somma e la differenza di

$$-c_0^4 (2m_0 + m_1 z)^3 + c_0^2 m_1^2 (c_0^2 z^2 + x^2)(2m_0 + m_1 z)$$

con

$$9c_0^4 m_1^2 t^2 - c_0^4 (2m_0 + m_1 z)^3 - 3c_0^2 m_1^2 (c_0^2 z^2 + x^2)(2m_0 + m_1 z);$$

ponendo in evidenza la differenza dei quadrati e facendo le riduzioni si ha l'equazione della superficie d'onda:

$$\begin{aligned}
&[(3c_0^2 m_1 t)^2 - c_0^2 (2m_0 + m_1 z)\{c_0^2 (2m_0 + m_1 z)^2 + \\
&+ 3(2m_0 + m_1 z)\cdot m_1^2 (c_0^2 z^2 + x^2)\}]^2 = \\
&= c_0^2 [c_0^2 (2m_0 + m_1 z)^2 - m_1^2 (c_0^2 z^2 + x^2)]^3.
\end{aligned} \tag{32}$$

In questa equazione basta porre $c_0 = 1$ per ottenere la superficie d'onda pel raggio ordinario, e si ritrova il risultato ottenuto dal sig. Garbasso pei mezzi isotropi eterogenei; e poichè le due superficie non offrono differenze sostanziali, è superfluo farne uno studio separato.

Basterà notare che ad uno stesso punto in generale arrivano due raggi luminosi diversi, in tempi diversi, come risulta dalle (28) e (29). E poichè questo succede tanto pei raggi ordinarî quanto pei raggi straordinarî, in un medesimo punto giungono generalmente quattro raggi curvi. Sull'asse delle z le due falde della superficie d'onda si toccano, come nei mezzi uniassici omogenei, perchè sopra questo asse $p_1 = p_2 = 0$, e le due velocità di propagazione secondo la normale coincidono.

Fisica. — *Sulla natura delle particelle ultramicroscopiche che intervengono nel fenomeno Majorana, e su un nuovo metodo di studio del campo magnetico* [1]. Replica al prof. O. M. Corbino di Mario Tenani, presentata dal Corrisp. A. Battelli.

In una Nota recente ho esposto un metodo per esaminare un campo magnetico, che si presentava come una modificazione del metodo proposto dal prof. O. M. Corbino nelle sue ultime Note in questi Rendiconti. Il metodo così modificato si basa sopra la nota proprietà dei mezzi torbidi di diffondere la luce in direzione trasversale a quella di un raggio luminoso che li attraversi: disponiamo fra i poli di un elettromagnete una vaschetta contenente una soluzione di *ferro Bravais*; come è noto, questa soluzione contiene in sospensione delle particelle ultramicroscopiche che, orientandosi nel campo, fanno assumere al liquido una spiccata birifrangenza, le due direzioni di vibrazione privilegiate essendo quella parallela alle linee di forza e quella ad essa perpendicolare. Se normalmente alle linee stesse si fa pervenire entro il liquido un fascio di luce polarizzata rettilineamente in un piano inclinato di 45° sulla direzione del campo, la vibrazione man mano che il raggio procede si modifica per effetto della birifrangenza. Una delle due componenti secondo le due direzioni privilegiate ritarda via via sull'altra; la vibrazione diventa ellittica e non riprende la forma rettilinea se non quando la differenza di cammino assunta dalle due componenti suddette sia diventata di mezza lunghezza d'onda: allora il raggio è polarizzato rettilineamente ma in un piano perpendicolare al piano di polarizzazione del raggio incidente. Proseguendo ancora, dopo un percorso corrispondente al precedente si avrà di nuovo polarizzazione rettilinea, ma in un piano parallelo al piano di polarizzazione del raggio incidente. Vi sono dunque tante sezioni del raggio luminoso in cui la vibrazione è rettilinea, e in tali sezioni il piano di polarizzazione è alternativamente parallelo e perpendicolare al piano primitivo.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa, direttto dal prof. A. Battelli.