ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 18 settembre 1910.

Matematica. — *Sulla caratteristica del risultante di Sylvester.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Siano

$$(1)\qquad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

$$(2)\qquad \mathrm{F}(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + b_n$$

due polinomî in x, dei rispettivi gradi m, n, e ne sia

$$(3)\qquad \mathrm{S} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \ldots 0 & b_0 \ldots 0 \\ a_1 & a_0 & \ldots 0 & b_1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_m & a_{m-1} \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 & a_m & 0 \ldots b_n \end{vmatrix}$$

il risultante di Sylvester, d'ordine $m + n$. Esso è scritto in modo un po' differente dal solito: le linee sono qui colonne, e le colonne sono linee; tale scambio semplificherà alcune considerazioni:

Se

$$(4)\qquad \mathrm{M}(x) = c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_{r-1} x + c_r$$

è il massimo comune divisore, di grado r, fra $f(x)$ ed $F(x)$, allora sarà $m+n-r$ la caratteristica del determinante S.

Questo teorema non è nuovo; noi qui vogliamo soltanto darne una facile dimostrazione.

Consideriamo i due polinomî *primi fra di loro*

$$\varphi = f:M = p_0 x^{m-r} + p_1 x^{m-r-1} + \cdots + p_{m-r-1} x + p_{m-r} \tag{5}$$
$$\Phi = F:M = q_0 x^{n-r} + q_1 x^{n-r-1} + \cdots + q_{n-r-1} x + q_{n-r}, \tag{6}$$

ed il loro risultante di Sylvester

$$\sigma = \begin{vmatrix} p_0 & 0 & \ldots 0 & q_0 \ldots 0 \\ p_1 & p_0 & \ldots & 0 & q_1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m-r} & p_{m-r-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & p_{m-r} & 0 & \ldots q_{n-r} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

d'ordine $m+n-2r$. Esso è diverso evidentemente da zero.

Fra i coefficienti dei polinomî f, F, M, φ, Φ valgono le relazioni

$$a_\nu = p_0 c_\nu + p_1 c_{\nu-1} + \cdots + p_{\nu-1} c_1 + p_\nu c_0 \tag{8}$$
$$b_\nu = q_0 c_\nu + q_1 c_{\nu-1} + \cdots + q_{\nu-1} c_1 + q_\nu c_0, \tag{9}$$

lineari nelle p e nelle q.

Ora consideriamo le $m+n-r$ forme lineari delle $m+n$ variabili $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n}$

$$\left\{\begin{array}{llll} \psi_1 = p_0 z_1 & & & + q_0 z_{n+1} \\ \psi_2 = p_1 z_1 + p_0 z_2 & & & + q_1 z_{n+1} + q_0 z_{n+2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{m-r+1} = p_{m-r} z_1 + p_{m-r-1} z_2 + & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{m-r+2} = & p_{m-r} z_2 + \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{m+n-r} = & & p_{m-r} z_n & + q_{n-r} z_{m+n}. \end{array}\right. \tag{10}$$

La matrice di questo sistema si forma costruendo, *nella maniera indicata da* (3), il risultante dei due polinomî

$$p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots + p_{m-r-1} x^{r+1} + p_{m-r} x^r$$
$$q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_{n-r-1} x^{r+1} + q_{n-r} x^r$$

ed assumendo le prime $m+n-r$ linee di questo determinante così formato.

Se in tale matrice del sistema (10) consideriamo il determinante di ordine $m+n-r$, ottenuto sopprimendo le colonne di posti $n+1, n+2, \dots, n+r$, noi troviamo che esso vale $p_0^r \sigma$, numero diverso da zero; dunque le $m+n-r$ forme (10) sono linearmente indipendenti.

Dopo ciò, riesce molto facile la dimostrazione del teorema che abbiamo enunciato.

Le relazioni (8) e (9) mostrano che, moltiplicando la prima delle forme (10) per c_ν, la seconda per $c_{\nu-1}, \dots$, la ν^{ma} per c_0, e sommando, si ottiene la forma

$$\Psi_\nu = a_\nu z_1 + a_{\nu-1} z_2 + \cdots + b_\nu z_{n+1} + \cdots + b_{\nu-m} z_{m+n} . \tag{11}$$

Essa ha per coefficienti gli elementi della ν^{ma} linea del determinante S; ma il numero ν è un arbitrario numero della serie $0, 1, 2, \dots, m+n$; dunque resta provato che il sistema di equazioni lineari rappresentato genericamente da (11) si ottiene combinando linearmente le $m+n-r$ forme lineari (10), le quali sono linearmente indipendenti. Ma S è proprio il determinante del sistema rappresentato da (11); tale determinante ha dunque la caratteristica $m+n-r$.

Matematica. — *Sopra un'equazione integrale di prima specie a limiti variabili considerata da Volterra.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Il prof. Volterra nella sua classica Memoria *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti* [1] studia l'equazione integrale di prima specie a limiti variabili

$$\int_{px}^{qx} \mathrm{K}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) - f(0), \tag{1}$$

nella funzione incognita $y(x)$, dove $\mathrm{K}(x, \xi)$ e $f(x)$ sono funzioni finite e continue assegnate rispettivamente nel quadrato Q di centro nell'origine e di lato $2a$ e nel tratto $(-a, a)$ e dove p e q sono costanti di valori assoluti diseguali pur esse assegnate. Senza alterare la generalità si può supporre

$$\left|\frac{p}{q}\right| < 1$$

[1] Annali di Matematica, serie II, t. XXV, 1897.

e col cambiamento di variabile $qx = z$ prendere la (1) nella forma

$$\int_{\frac{p}{q}z}^{z} \mathrm{K}\left(\frac{z}{q}, \xi\right) y(\xi)\, d\xi = f\left(\frac{z}{q}\right) - f(0).$$

Ci si può dunque limitare, come osserva il Volterra, a studiare l'equazione

$$\int_{\alpha x}^{x} \mathrm{K}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) - f(0), \tag{2}$$

dove per la costante α si verifica la diseguaglianza

$$|\alpha| < 1.$$

Il Volterra riesce, sotto certe ipotesi, ai teoremi d'esistenza e di unicità relativi alla soluzione dell'equazione (2), seguendo due vie diverse secondochè è $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$. Egli ricorre ad una formola del calcolo delle differenze finite.

Nella presente Nota diamo i teoremi d'esistenza e d'unicità per la soluzione della (1) sotto le stesse ipotesi del Volterra, ma per via molto più semplice e più diretta, mediante la quale non saremo costretti a distinguere i due casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. Noi procediamo esclusivamente per approssimazioni successive convenientemente dirette.

2. Nella trattazione dei problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari iperboliche alle derivate parziali del 2° ordine, in due variabili indipendenti, si perviene a tradurne i teoremi d'esistenza e d'unicità in quelli per le soluzioni di equazioni integrali del seguente tipo

$$\int_{l(x)}^{x} \mathrm{K}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) - f(0), \tag{3}$$

dove $l(x)$ è funzione definita in $(-a, a)$ ivi finita e continua, nulla nell'origine. Ciò è mostrato in un nostro lavoro presentemente in corso di stampa nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo [1], nel qual lavoro riusciamo, sotto certe ipotesi il cui numero sarà notevolmente diminuito in una Memoria che contiamo di redigere prossimamente, ai teoremi d'esistenza e d'unicità per la soluzione dell'equazione integrale (3). Il metodo seguìto in detto lavoro per la risoluzione della (3) presenta profonde analogie con quello che seguiamo qui per la soluzione della (2), ma le ipotesi relative alla $\mathrm{K}(x, \xi)$, sotto cui è valido l'ultimo metodo, sono meno restrittive di quelle sotto cui è valido il primo; ciò dipende dalla particolare forma αx della funzione $l(x)$.

[1] In questo lavoro perveniamo ai teoremi d'esistenza e d'unicità per le soluzioni di un'equazione iperbolica alle derivate parziali del 2° ordine, assoggettate a prendere valori assegnati lungo due curve, togliendo per queste la condizione della monotonia.

3. Noi vogliamo dimostrare il *teorema di Volterra*:

Se le funzioni $K(x, \xi)$, $\frac{\partial K}{\partial x}$, $f(x)$, $\frac{df}{dx}$ *sono, nei rispettivi campi d'esistenza, finite e continue e se* $K(x, x)$ *si mantiene diversa da zero in tutto il tratto* $(-a, a)$, *esiste una ed una sola soluzione dell'equazione integrale* (2), *finita e continua in* $(-a, a)$ (¹).

Per dimostrare il teorema osserviamo anzitutto col Volterra che l'equazione (2) è equivalente a quella che se ne trae eguagliando le derivate d'ambo i membri, poichè ci limitiamo alla ricerca delle soluzioni della (2) finite e continue in $(-a, a)$. La (2) è cioè equivalente alla

$$y(x)\, K(x, x) - \alpha K(x, \alpha x)\, y(\alpha x) + \int_{\alpha x}^{x} \frac{\partial K}{\partial x}\, y(\xi)\, d\xi = \frac{df}{dx},$$

la quale, ponendo

$$\frac{K(x, \alpha x)}{K(x, x)} = \lambda(x) \quad , \quad -\frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K}{\partial x} = H(x, \xi) \quad , \quad \frac{1}{K(x, x)} \frac{df}{dx} = \varphi(x),$$

può scriversi

$$(4) \qquad y(x) = \varphi(x) + \alpha \lambda(x)\, y(\alpha x) + \int_{\alpha x}^{x} H(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi .$$

Le funzioni $\varphi(x)$, $\lambda(x)$, $H(x, \xi)$ sono finite e continue nei rispettivi campi d'esistenza e si ha

$$(5) \qquad \lambda(0) = 1 .$$

Definiamo la successione di funzioni $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ ponendo

$$y_0(x) = \varphi(x),$$

$$y_{n+1}(x) = \varphi(x) + \alpha \lambda(x)\, y_n(\alpha x) + \int_{\alpha x}^{x} H(x, \xi)\, y_n(\xi)\, d\xi .$$

Se dimostriamo la uniforme convergenza in $(-a, a)$ della serie

$$(6) \qquad y_0(x) + \{y_1(x) - y_0(x)\} + \cdots + \{y_{n+1}(x) - y_n(x)\} + \cdots$$

potremo affermare, com'è ben noto, l'esistenza e l'unicità di una soluzione dell'equazione (4), cioè della (2), soluzione rappresentata dalla somma della serie (6) o dal limite $\lim_{n=\infty} y_n(x)$.

Tutto dunque si riduce a dimostrare l'indicata convergenza della serie (6). Perciò, osserviamo dapprima che, per la (5), detto l_{k+1} il massimo in

(¹) Veramente le $K(x, \xi)$ e $\frac{\partial K}{\partial x}$ potrebbero anche presentare delle particolari discontinuità e il teorema sussisterebbe ugualmente. Cfr. il notro citato lavoro.

$(-a\,,\,a)$ dei valori assoluti di $\lambda(\alpha^k x)$, si ha

$$\lim_{k=\infty} l_{k+1} = 1\,. \tag{7}$$

Per procedere più speditamente nel maggiorare la serie (6), introduciamo la funzione $S(x\,,\,\xi)$ definita al modo seguente:

$$\text{per ogni valore di } x \geq 0 \text{ è } \begin{cases} S(x\,,\,\xi) = 0 & \text{per } -x \leq \xi < \alpha x \\ = H(x\,,\,\xi) & \text{per } \alpha x \leq \xi \leq x \end{cases};$$

$$\text{per ogni valore di } x \leq 0 \text{ è } \begin{cases} S(x\,,\,\xi) = 0 & \text{per } -x \geq \xi > \alpha x \\ = H(x\,,\,\xi) & \text{per } \alpha x \geq \xi \geq x \end{cases}.$$

Dopo ciò si potrà porre:

$$y_{n+1}(x) = \varphi(x) + \alpha\lambda(x)\, y_n(\alpha x) + \int_{-x}^{x} S(x\,,\,\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi\,.$$

Osserviamo l'eguaglianza

$$\begin{gathered} y_{n+2}(\alpha^k x) - y_{n+1}(\alpha^k x) = \alpha\lambda(\alpha^k x) \left\{ y_{n+1}(\alpha^{k+1}x) - y_n(\alpha^{k+1}x) \right\} + \\ + \alpha^k \int_{-x}^{x} S(\alpha^k x\,,\,\alpha^k\xi) \left\{ y_{n+1}(\alpha^k \xi) - y_n(\alpha^k \xi) \right\} d\xi\,, \\ (k\,,\,n = 0\,,\,1\,,\,\ldots). \end{gathered} \tag{8}$$

Diciamo m_0 e m i massimi in $(-a\,,\,a)$ dei valori assoluti rispettivamente delle funzioni $y_0(x)$ e $y_1(x) - y_0(x)$ e diciamo M il massimo in Q dei valori assoluti di $S(x\,,\,\xi)$. Si ha, dalla (8) per $n = 0$,

$$|y_2(\alpha^k x) - y_1(\alpha^k x)| \leq |\alpha|\, l_{k+1}\, m + |\alpha|^k\, m M\,.\, 2x\,,$$

per $x \geq 0$, e, per $x \leq 0$,

$$|y_2(\alpha^k x) - y_1(\alpha^k x)| \leq |\alpha|\, l_{k+1}\, m - |\alpha|^k\, m M\,.\, 2x\,,$$

ne segue, posto

$$|\alpha| = \varrho$$

e tenendo conto della diseguaglianza $\varrho^k < 1$,

$$|y_2(\alpha^k x) - y_1(\alpha^k x)| < m(\varrho l_{k+1} + 2M|x|) \qquad (k = 0\,,\,1\,,\,\ldots).$$

Dalla stessa (8) per $n = 1$, si avrà dopo ciò, per $x \geq 0$,

$$\begin{gathered} |y_3(\alpha^k x) - y_2(\alpha^k x)| < \varrho l_{k+1}\,.\, m(\varrho l_{k+2} + 2Mx) + \varrho^k M m \int_{-x}^{0} (\varrho l_{k+1} - 2M\xi)\, d\xi + \\ + \varrho^k M m \int_{0}^{x} (\varrho l_{k+1} + 2M\xi)\, d\xi < m \left\{ \varrho^2 l_{k+1}\, l_{k+2} + 2\varrho l_{k+1}\,.\, 2Mx + \frac{(2Mx)^2}{2!} \right\}, \end{gathered}$$

e, per $x \leq 0$,

$$|y_3(\alpha^k x) - y_2(\alpha^k x)| < \varrho l_{k+1} \,.\, m(\varrho l_{k+2} - 2\mathrm{M}x) + \varrho^k \mathrm{M}m \int_x^0 (\varrho l_{k+1} - 2\mathrm{M}\xi)\, d\xi +$$

$$+ \varrho^k \mathrm{M}m \int_0^{-\infty} (\varrho l_{k+1} + 2\mathrm{M}\xi)\, d\xi < m \left\{ \varrho^2 l_{k+1}\, l_{k+2} - 2\varrho l_{k+1} \,.\, 2\mathrm{M}x + \frac{(2\mathrm{M}x)^2}{2\,!} \right\};$$

ne segue

$$|y_3(\alpha^k x) - y_2(\alpha^k x)| < m \left\{ \varrho^2 l_{k+1}\, l_{k+2} + 2\varrho l_{k+1} \,.\, 2\mathrm{M}|x| + \frac{(2\mathrm{M}|x|)^2}{2\,!} \right\}$$

$$(k = 0\,, 1\,, \ldots).$$

Dopo ciò potremo dimostrare subito, per induzione, la diseguaglianza

$$(9) \qquad |y_{n+1}(\alpha^k x) - y_n(\alpha^k x)| < m \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varrho^{n-i}\, l_{k+1}\, l_{k+2} \ldots l_{k+n-i} \frac{(2\mathrm{M}|x|)^i}{i\,!},$$

per qualunque valore di n e di k. Difatti, supposta valida la (9) per qualunque valore di k, si ha, per $x \geq 0$,

$$|y_{n+2}(\alpha^k x) - y_{n+1}(\alpha^k x)| < \varrho l_{k+1} \,.\, m \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varrho^{n-i}\, l_{k+2} \ldots l_{k+1+n-i} \frac{(2\mathrm{M}x)^i}{i\,!} +$$

$$+ \mathrm{M}m \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varrho^{n-i}\, l_{k+1} \ldots l_{k+n-i} \frac{(2\mathrm{M})^i}{i\,!} |\xi|^i\, d\xi =$$

$$= m \left\{ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varrho^{n+1-i}\, l_{k+1} \ldots l_{k+1+n-i} \frac{(2\mathrm{M}x)^i}{i\,!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varrho^{n-i}\, l_{k+1} \ldots l_{k+n-i} \frac{(2\mathrm{M}x)^{i+1}}{(i+1)\,!} \right\} =$$

$$= m \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \varrho^{n+1-i}\, l_{k+1} \ldots l_{k+(n+1)-i} \frac{(2\mathrm{M}|x|)^i}{i\,!};$$

e alla stessa diseguaglianza si giungerà per $x \leq 0$.

Se la serie

$$(10) \qquad m_0 + m \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varrho^{n-i}\, l_1\, l_2 \ldots l_{n-i} \frac{(2\mathrm{M}x)^i}{i\,!}$$

è convergente in egual grado in $(0\,, a)$, la (6) lo sarà in $(-a\,, a)$. Per dimostrare la convergenza in egnal grado della (10), scriviamòla al modo seguente:

$$m_0 + m \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\mathrm{M}x)^i}{(i\,!)^2} \sum_{n=i}^{\infty} (n\,, i)\, \varrho^{n-i}\, l_1\, l_2 \ldots l_{n-i}\,,$$

dove abbiamo posto $n(n-1) \ldots (n-i+1) = (n\,, i)$. La serie di numeri positivi

$$(11) \qquad \sum_{n=i}^{\infty} (n\,, i)\, \varrho^{n-i}\, l_1\, l_2 \ldots l_{n-i}$$

è convergente come si vede osservando che il rapporto di un termine al precedente è

$$l_{n+1-i}\,\frac{n+1}{n-i+1}\,\varrho\,,$$

quantità che, per la (7), ha per limite ϱ al tendere di n all'infinito. Per trovare un valore maggiore della somma della serie (11) diciamo s un numero intiero e positivo (certamente esistente per la (7)) tale che per $k \geq s+1$ sia

$$\varrho l_k < \varrho_1 < 1\,,$$

dove potrà sempre supporsi $\varrho_1 > \varrho$. Diciamo l un numero maggiore di 1 e di $l_1\,, l_2\,, \ldots l_s$, si avrà

$$\sum_{n=i}^{\infty}(n\,,i)\,\varrho^{n-i}\,l_1\,l_2\ldots l_{n-i} =$$

$$= l^s\left\{\frac{(i\,,i)}{l^s}+\frac{(i+1\,,i)}{l^{s-1}}\,\varrho\,\frac{l_1}{l}+\cdots+(i+s\,,i)\,\varrho^s\,\frac{l_1}{l}\cdots\frac{l_s}{l}+\cdots+\right.$$

$$\left.+(i+s+k\,,i)\,\varrho^s\,\frac{l_1}{l}\cdots\frac{l_s}{l}\,(\varrho l_{s+1})\cdots(\varrho l_{s+k})+\cdots\right\}<$$

$$< l^s\sum_{n=i}^{\infty}(n\,,i)\,\varrho_1^{n-i} = l^s\,\frac{i!}{(1-\varrho_1)^i}\,.$$

La serie (10) sarà pertanto, per ogni valore di x in $(0\,,a)$, minore di

$$m_0 + m l^s\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{2\mathrm{M}x}{1-\varrho_1}\right)^i = m_0 + m l^s\,e^{\frac{2\mathrm{M}x}{1-\varrho_1}}\,,$$

e sarà quindi convergente in egual grado.

4. Risulta perciò dimostrato il teorema di Volterra. Osserviamo che il nostro metodo di risoluzione della (4), applicato nel caso particolare $\mathrm{H}(x\,,\xi)\equiv 0$, ci dà per la unica soluzione dell'equazione funzionale

$$y(x) - \alpha\lambda(x)\,y(\alpha x) = \varphi(x)$$

la nota espressione del calcolo delle differenze finite

$$y(x) = \varphi(x) + \alpha\lambda(x)\,\varphi(\alpha x) + \alpha^2\lambda(\alpha x)\,\lambda(x)\,\varphi(\alpha^2 x) + \cdots$$

5. Il teorema di Volterra testè dimostrato, come subito si rileva dal citato nostro lavoro, si traduce nel seguente per le equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine del tipo iperbolico:

Per un punto O *del piano passino due segmenti di retta* $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2$ *e* $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$ *tali che o il rettangolo formato dalle parallele all'asse* x *per* H_1 *e* H_2 *e dalle parallele all'asse* y *per* K_1 *e* K_2, *o quello formato dalle parallele all'asse* x *per* K_1 *e* K_2 *e dalle parallele all'asse* y *per* H_1 *e*

H_2, *contenga intieramente nel suo interno i due segmenti, allora,* SE IL RAPPORTO ANARMONICO DEI RAGGI $H_1 H_2$ E $K_1 K_2$ RISPETTO AI DUE RAGGI PER O PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI (*caratteristiche dell'equazione*) NON È NÈ 1 NÈ -1, *esiste nel rettangolo, ben determinato, contenente i due segmenti, una ed una sola soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y) \tag{12}$$

assoggettata a prendere su quei segmenti valori assegnati, coincidenti in O.

Un'equazione del tipo della (4) fu già studiata con tutt'altro metodo dal Picard [1]. Tale studio gli permise di ritrovare il seguente risultato del Goursat: lungo i due segmenti $H_1 H_2$ e $K_1 K_2$, purchè non coincidano e *non separino le caratteristiche per* O, si possono dare i valori (coincidenti in O) di una soluzione u della (12), in seguito a che essa soluzione risulta determinata nel rettangolo contenente i due segmenti. Tale risultato è conseguito col nostro teorema, secondo il quale i due segmenti $H_1 H_2$ e $K_1 K_2$ possono anche separare le caratteristiche per O purchè essi non siano le diagonali del rettangolo in cui sono contenuti.

Matematica. — *Alcune osservazioni intorno alla teoria delle serie di Fourier-Hilbert-Schmidt.* Nota del prof. AMOROSO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

SERIE ANALOGHE ALLE SERIE DI HILBERT-FOURIER.

1. Indichiamo con $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ un sistema di infinite funzioni reali della variabile reale x, finite e continue entro un intervallo assegnato a, b insieme alle loro derivate dei primi due ordini.

Supponiamo ancora

1°) che le derivate prime $\psi'_1(x), \psi'_2(x), \ldots$ costituiscono un sistema normale ortogonale nell'intervallo indicato

$$\int_a^b \psi'_\mu(x)\, \psi'_\nu(x)\, dx = 1\,, \quad \mu = \nu$$
$$= 0\,, \quad \mu \neq \nu\,;$$

2°) che le derivate seconde $\psi''_1(x), \psi''_2(x), \ldots$ costituiscano un sistema chiuso.

[1] Picard, *Sur une équation fonctionnelle se presentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles.* Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, vol. 144 (1907).