ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

H_2, *contenga intieramente nel suo interno i due segmenti, allora,* SE IL RAPPORTO ANARMONICO DEI RAGGI $H_1 H_2$ E $K_1 K_2$ RISPETTO AI DUE RAGGI PER O PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI (*caratteristiche dell'equazione*) NON È NÈ 1 NÈ -1, *esiste nel rettangolo, ben determinato, contenente i due segmenti, una ed una sola soluzione dell'equazione*

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = f(x, y)$$

assoggettata a prendere su quei segmenti valori assegnati, coincidenti in O.

Un'equazione del tipo della (4) fu già studiata con tutt'altro metodo dal Picard [1]. Tale studio gli permise di ritrovare il seguente risultato del Goursat: lungo i due segmenti $H_1 H_2$ e $K_1 K_2$, purchè non coincidano e *non separino le caratteristiche per* O, si possono dare i valori (coincidenti in O) di una soluzione u della (12), in seguito a che essa soluzione risulta determinata nel rettangolo contenente i due segmenti. Tale risultato è conseguito col nostro teorema, secondo il quale i due segmenti $H_1 H_2$ e $K_1 K_2$ possono anche separare le caratteristiche per O purchè essi non siano le diagonali del rettangolo in cui sono contenuti.

Matematica. — *Alcune osservazioni intorno alla teoria delle serie di Fourier-Hilbert-Schmidt.* Nota del prof. AMOROSO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

SERIE ANALOGHE ALLE SERIE DI HILBERT-FOURIER.

1. Indichiamo con $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ un sistema di infinite funzioni reali della variabile reale x, finite e continue entro un intervallo assegnato a, b insieme alle loro derivate dei primi due ordini.

Supponiamo ancora

1°) che le derivate prime $\psi'_1(x), \psi'_2(x), \ldots$ costituiscono un sistema normale ortogonale nell'intervallo indicato

$$\int_a^b \psi'_\mu(x)\, \psi'_\nu(x)\, dx = 1\,, \quad \mu = \nu$$
$$= 0\,, \quad \mu \neq \nu\,;$$

2°) che le derivate seconde $\psi''_1(x), \psi''_2(x), \ldots$ costituiscano un sistema chiuso.

[1] Picard, *Sur une équation fonctionnelle se presentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles.* Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, vol. 144 (1907).

In tali ipotesi, lo Schmidt [1] ha dimostrato che una funzione reale arbitraria della x nell'intervallo a, b, può sempre essere rappresentata mediante una serie delle funzioni $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... convergente assolutamente ed uniformemente nell'intervallo dato, più eventualmente un polinomio lineare in x. La formula dello Schmidt è la seguente:

$$(1) \quad g(x) = \frac{bg(a) - ag(b)}{b-a} + x\,\frac{g(b)-g(a)}{b-a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b \psi'_\nu(y)\, g'(y)\, dy.$$

Questa formula esprime la funzione $g(x)$ per mezzo dei valori della derivata $g'(x)$ in tutto l'intervallo, e dei valori della $g(x)$ nel punto a e nel punto b. Ma la funzione $g(x)$ è completamente determinata, quando sono dati i valori della derivata $g'(x)$ in tutto l'intervallo, ed il valore della $g(x)$ in un solo punto, per es. in a; onde deve essere possibile, nel secondo membro della formula precedente, eliminare $g(b)$. Abbiamo infatti

$$g(b) = g(a) + \int_a^b g'(x)\, dx,$$

e quindi, sostituendo, la formula di Schmidt si trasforma nella seguente:

$$(2) \quad g(x) = g(a) + \frac{x-a}{b-a} \int_a^b g'(x)\, dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy.$$

2. La formula

$$(3) \quad g(x) = \varphi(x) - \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\, \psi_\mu(x) \int_a^b \Delta(\psi_\mu(x))\, \Delta(\varphi(x))\, dx + \\ + \sum_{1}^{\infty} \psi_\mu(x) \int_a^b \Delta(\psi_\mu(x)\, \Delta(g(x))\, dx$$

$$(\Delta(\varphi) = \varphi^{(n)} + p_1\, \varphi^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}\, \varphi' + p_n\, \varphi),$$

che abbiamo dimostrato in fine della nostra Nota: *Sulla sviluppabilità in serie*, ecc. [2], si può considerare come una generalizzazione della formula (2).

Ricordiamo le ipotesi in cui la (3) è valida.

1°) $g(x)$, $p_1(x)$, ... $p_n(x)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... sono funzioni analitiche della variabile complessa x, reali per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro un cerchio che ha centro nel punto $x = a$, e raggio maggiore di $b - a$;

2°) La $\varphi(x)$ e le sue prime $n-1$ derivate assumono per $x = a$ i valori della $g(x)$ e delle sue prime $n-1$ derivate; $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... si

[1] Mat. Ann. 1907, *Entwicklung Willkürlicher Functionen*, etc., § 16.
[2] Rend. Accad. Lincei, 5 giugno 1910.

annullano per $x = a$ insieme alle loro prime $n - 1$ derivate, e sono linearmente indipendenti;

3°) $\Delta(\psi_1(x))$, $\Delta(\psi_2(x))$, ... sono funzioni normali ed ortogonali nell'intervallo $a\,b$, e costituiscono in quell'intervallo un sistema chiuso.

In particolare tra le funzioni $\varphi(x)$ che soddisfano alle condizioni indicate, possiamo considerare un polinomio di grado $n - 1$.

Poniamo $n = 1$, $\Delta(\varphi) = \varphi'$, $\varphi(x) = g(a)$, otteniamo in particolare una formula analoga alla (2)

$$g(x) = g(a) + \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_a^b \psi'_\mu(x)\, g'(x)\, dx, \tag{4}$$

che è più semplice della (2) in quanto che in essa non comparisce il termine lineare in $x - a$. Ciò dipende dal fatto che le funzioni $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., che compariscono nella (2), si annullano, per ipotesi, per $x = a$ e per $x = b$: mentre quelle che compariscono nella (4), si annullano, per ipotesi, solo per $x = a$. In compenso, la (2) vale in ipotesi meno restrittive, in quanto che le funzioni che ivi compariscono sono funzioni reali, non soggette ad altra limitazione che a quella di esser funzioni finite e continue insieme con le loro derivate prime e seconde nell'intervallo $a\,b$; mentre per le funzioni che compariscono nella (4) si è supposto che siano funzioni della variabile complessa x, reali per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro tutto un cerchio, avente centro nel punto $x = a$, e raggio maggiore di $b - a$.

Poniamo successivamente

$$n = 2,\ \Delta(\varphi) = \varphi'',\ \varphi(x) = g(a) + (x - a)\, g'(a),$$
$$n = 3,\ \Delta(\varphi) = \varphi''',\ \varphi(x) = g(a) + (x - a)\, g'(a) + \tfrac{1}{2}(x - a)^2\, g''(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

otteniamo dalla (3) altrettante formule particolari

$$\left\{\begin{aligned} g(x) &= g(a) + (x - a)\, g'(a) + \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_a^b \psi''_\mu(x)\, g''(x)\, dx \\ g(x) &= g(a) + (x - a)\, g'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}\, g''(a) + \\ &\qquad + \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_a^b \psi'''_\mu(x)\, g'''(x)\, dx. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

L'ordine n, la forma delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_n(x)$ che compariscono nella definizione del simbolo Δ, essendo arbitrarie, la $\varphi(x)$ essendo pure arbitraria, limitatamente alla condizione che nel punto $x = a$, assumano essa e le sue prime $n - 1$ derivate i valori $g(a)$, $g'(a)$, ... $g^{n-1}(a)$,

si vede che nella formula (3) *sono compresi infiniti sviluppi in serie di una funzione data* $g(x)$.

3. Date infinite funzioni $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... diremo che esse costituiscono un sistema *equinormale-ortogonale* entro un intervallo a, b, se è possibile determinare l'ordine n, e la forma delle funzioni $p_1(x)$, ... $p_n(x)$, che compariscono nel simbolo Δ in modo che sia

$$\int_a^b \Delta(\psi_\mu(x))\,\Delta(\psi_\nu(x))\,dx = 1\,,\ \mu = \nu$$
$$= 0\,,\ \mu \neq \nu\,.$$

Se una funzione $g(x)$ derivabile n volte è sviluppabile in serie per le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... convergente assolutamente ed uniformemente nell' intervallo a, b, essa e tutte quelle che si ottengono derivando termine a termine n volte,

$$g(x) = \sum_1^\infty{}_\mu\, A_\mu\, \psi_\mu(x)\,, \tag{6}$$

i coefficienti A_μ si calcolano immediatamente mediante le formule

$$A_\mu = \int_a^b \Delta(g(x))\,\Delta(\psi_\mu(x))\,dx\,.$$

Una serie, come la (6) procedente per funzioni equinormali ortogonali, la diremo *serie analoga alle serie di Hilbert-Fourier.*

La serie (3) *e tutte quelle che si deducono da essa, sono serie analoghe alle serie di Hilbert-Fourier.*

La serie (1) *di Schmidt è una serie analoga alle serie di Hilbert-Fourier.*

Funzioni analoghe ai polinomi di Legendre.

4. Posto

$$\Delta(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y\,, \tag{7}$$

consideriamo le equazioni differenziali

$$\Delta(\theta) = X_0\,,\ \Delta(\theta) = X_1\,,\ \ldots\ \Delta(\theta) = X_m\,,\ \ldots$$

X_0, X_1, X_m, ... essendo i polinomi di Legendre, e diciamo θ_0, θ_1, ... θ_m, ... gl' integrali di quelle equazioni differenziali che per $x = -1$ si annullano essi e le loro prime $n-1$ derivate.

Le funzioni X_0, X_1, ... X_m, ... costituendo un sistema *chiuso* di funzioni *normali ortogonali*, possiamo nella formola (3) al posto delle ψ_0, ψ_1, ... $\psi_{m'}$, ... sostituire le θ_0, θ_1, ... θ_m, ..., dopo aver preso $a = -1$, $b = 1$. Assunto

come funzione $\varphi(x)$ un polinomio di grado $n-1$, tenendo conto dell'arbitrarietà del simbolo Δ, raccogliamo il seguente risultato:

Una funzione arbitraria della variabile complessa x, reale per x reale, regolare senza eccezione entro un cerchio che ha centro nel punto $x=-1$ e raggio maggiore di 2, si può, nel tratto reale da -1 a $+1$, sviluppare in infiniti modi in una serie di funzioni analoghe ai polinomi di Legendre più eventualmente un polinomio in x di grado $n-1$.

Meccanica. — *Sopra un problema di Huygens.* Nota di Giovanni Vacca, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

Dati quanti si vogliano corpi elastici allineati, in linea retta, senza toccarsi: supponiamo che il primo urti il secondo con una velocità data; il secondo urti il terzo colla velocità acquistata nel primo urto, e così di seguito. Date le masse del primo e dell'ultimo, si domanda quali devono essere le masse dei corpi intermedî perchè l'ultimo acquisti la massima velocità possibile.

Huygens per il primo trovò che le masse dei corpi dati devono essere in progressione geometrica (*De motu corporum ex percussione*, prop. XIII; Opuscula postuma, Lugd. Batav., 1703, p. 397). Ma il suo ragionamento non era completo. Lagrange perciò, in una sua Memoria giovanile: *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* (Misc. Taur., t. I, 1759; Oeuvres, t. I, Paris, 1867, pp. 15-18), ne diede una dimostrazione completa.

Egli ricorse perciò ad un criterio da lui scoperto, col quale data una funzione di più variabili, tale che tutte le sue derivate prime si annullino per un certo sistema di valori delle variabili, si può talvolta accertare, considerando certe diseguaglianze a cui soddisfano le derivate seconde, se per quel sistema di valori la funzione considerata sia massima o minima in un dato campo.

Ma la verificazione delle condizioni che affermano l'esistenza del massimo, è piuttosto complicata; tanto che con mezzi del tutto elementari ed altrettanto semplici, si può giungere ad una soluzione diretta e rigorosa del problema proposto.

Si sa dalla meccanica che se un corpo elastico di massa a, con una velocità data, che possiamo supporre eguale all'unità, urta un corpo di massa b, gli trasmette la velocità $\frac{2a}{a+b}=\frac{2}{1+\frac{a}{b}}$.

Se abbiamo ora $n+2$ corpi di masse $a_0=1$, a_1, a_2, ... a_n, $a_{n+1}=b$, la velocità trasmessa all'ultimo dal primo, che urta il secondo con velocità 1,