ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

come funzione $\varphi(x)$ un polinomio di grado $n-1$, tenendo conto dell'arbitrarietà del simbolo Δ, raccogliamo il seguente risultato:

Una funzione arbitraria della variabile complessa x, reale per x reale, regolare senza eccezione entro un cerchio che ha centro nel punto $x=-1$ e raggio maggiore di 2, si può, nel tratto reale da -1 a $+1$, sviluppare in infiniti modi in una serie di funzioni analoghe ai polinomi di Legendre più eventualmente un polinomio in x di grado $n-1$.

Meccanica. — *Sopra un problema di Huygens.* Nota di Giovanni Vacca, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

Dati quanti si vogliano corpi elastici allineati, in linea retta, senza toccarsi: supponiamo che il primo urti il secondo con una velocità data; il secondo urti il terzo colla velocità acquistata nel primo urto, e così di seguito. Date le masse del primo e dell'ultimo, si domanda quali devono essere le masse dei corpi intermedî perchè l'ultimo acquisti la massima velocità possibile.

Huygens per il primo trovò che le masse dei corpi dati devono essere in progressione geometrica (*De motu corporum ex percussione*, prop. XIII; Opuscula postuma, Lugd. Batav., 1703, p. 397). Ma il suo ragionamento non era completo. Lagrange perciò, in una sua Memoria giovanile: *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* (Misc. Taur., t. I, 1759; Oeuvres, t. I, Paris, 1867, pp. 15-18), ne diede una dimostrazione completa.

Egli ricorse perciò ad un criterio da lui scoperto, col quale data una funzione di più variabili, tale che tutte le sue derivate prime si annullino per un certo sistema di valori delle variabili, si può talvolta accertare, considerando certe diseguaglianze a cui soddisfano le derivate seconde, se per quel sistema di valori la funzione considerata sia massima o minima in un dato campo.

Ma la verificazione delle condizioni che affermano l'esistenza del massimo, è piuttosto complicata; tanto che con mezzi del tutto elementari ed altrettanto semplici, si può giungere ad una soluzione diretta e rigorosa del problema proposto.

Si sa dalla meccanica che se un corpo elastico di massa a, con una velocità data, che possiamo supporre eguale all'unità, urta un corpo di massa b, gli trasmette la velocità $\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{2}{1+\dfrac{a}{b}}$.

Se abbiamo ora $n+2$ corpi di masse $a_0=1\,, a_1\,, a_2\,, \ldots\, a_n\,, a_{n+1}=b$, la velocità trasmessa all'ultimo dal primo, che urta il secondo con velocità 1, (che urta il terzo ecc.), sarà:

$$\frac{2^{n+1}}{(1+a_1)\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)}.$$

Perchè questa quantità sia massima, occorre sia minimo il denominatore. Converrà, per rendere più simmetrici i calcoli, considerare invece delle incognite $a_1 \ldots a_n$, le $y_1 \ldots y_n$, definite così. Si ponga $x^{n+1}=b$, e poi

$$xy_1=a_1\,,\ xy_2=\frac{a_2}{a_1}\,,\ xy_3=\frac{a_3}{a_2}\,,\ \ldots\ xy_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\,;$$

dalle quali si ricava:

$$a_1=xy_1\,,\ a_2=x^2y_1y_2\,,\ \ldots\ a_n=x^ny_1\ldots y_n\,,\ a_{n+1}=x^{n+1}\,.$$

Si tratta allora di rendere minimo, per qualunque sistema di valori positivi delle $y_1 \ldots y_n$ (ovvero delle $a_1 \ldots a_n$) il prodotto

$$(1+xy_1)(1+xy_2)\ldots(1+xy_n)\left(1+\frac{x}{y_1\cdots y_n}\right).$$

Si ordini il prodotto dei primi n fattori secondo le potenze di x, ponendo, come si usa,

$$c_1=\Sigma y_1\,,\ c_2=\Sigma y_1y_2\,,\ \ldots\ c_n=y_1\ldots y_n\,.$$

Il prodotto indicato diventa:

$$(1+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n)\left(1+\frac{x}{c_n}\right)=$$
$$=1+\left(c_n+\frac{1}{c_n}\right)x+\left(c_2+\frac{c_1}{c_n}\right)x^2+\cdots+\left(c_n+\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)x^n+x^{n+1}\,,$$

ora è facile vedere che, ad un tempo si ha:

$$c_1+\frac{1}{c_n}>\binom{n+1}{1},\ \left(c_2+\frac{c_1}{c_n}\right)>\binom{n+1}{2},\ \ldots\ \left(c_n+\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)>\binom{n+1}{n}$$

a meno che non sia $y_1=y_2=\cdots=y_n=1$, nel qual caso soltanto tutte queste diseguaglianze diventano altrettante eguaglianze.

Per persuadersene, si osservi che il prodotto degli $\binom{n}{r}$ termini di c_r, moltiplicato per il prodotto degli $\binom{n}{r-1}$ termini di $\frac{c_{r-1}}{c_n}$ è eguale alla unità; poichè nel primo prodotto ogni lettera, per es., y_1, entra alla potenza

$\binom{n-1}{r-1}$ e nel secondo prodotto, i cui termini sono del tipo $\frac{1}{a_1 \dots a_{n-r+1}}$, entra alla potenza $-\binom{n-1}{n-r} = -\binom{n-1}{r-1}$.

Perciò essendo il prodotto degli $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ termini che formano la somma $c_r + \frac{c_{r-1}}{c_n}$ costante (ed eguale all'unità), la somma dei termini stessi sarà minima allorchè tutti i termini sieno eguali tra loro, e perciò eguali all'unità. Di quì si conclude facilmente che

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1\,.$$

Perciò il prodotto indicato sarà sempre maggiore di $(1+x)^{n+1}$, a meno che non sia $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$. Nel qual caso si ha l'eguaglianza. Ma in tal caso,

$$a_1 = x\,,\, a_2 = x^2\,, \dots a_n = x^n\,,\, a_{n+1} = x^{n+1}$$

ossia gli $n+2$ corpi considerati hanno le loro masse in progressione geometrica, come si voleva dimostrare.

Coll'aumentare del numero dei corpi interposti, la velocità massima dell'ultimo aumenta e tende ad un limite che si può facilmente calcolare:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^n}{(1+b^{\frac{1}{n}})^n} = b^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Ma senza fare il calcolo, si può prevedere *a priori* (ricorrendo alla legge di conservazione dell'energia), che un corpo di massa 1, dotato di velocità 1, non può imprimere ad un corpo di massa b una velocità maggiore di $\frac{1}{\sqrt{b}}$. Se $b=1$, non occorrono corpi intermedî; ma se b è diverso da 1, non si può riescire, per quanto grande sia il numero di corpi interposti, con urti successivi, a trasmettere al corpo di massa b, tutta l'energia del primo corpo, e coll'aumentare del numero dei corpi intermedî, se ne può trasmettere una parte tanto grande quanto si vuole.