ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 2 ottobre 1910.

Matematica. — *Nuove osservazioni sul problema di Hurwitz.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE.

1. Sia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

un'equazione di grado n, a coefficienti reali.

Come in un mio recente lavoro, inserito nei Rendiconti di questa illustre Accademia, io chiamo qui *problema di Hurwitz* il problema che consiste nella ricerca di condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione (1) abbia tutte negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse [1].

Intanto ripetiamo l'osservazione che i coefficienti debbono essere diversi da zero, e di ugual segno: ciò risulta dalla decomposizione del polinomio nei suoi fattori, lineari e quadratici, corrispondenti alle radici reali ed alle coppie di radici complesse.

[1] Il prof. Marcolongo mi ha rammentato che, per esempio, nella Dinamica del Routh si trova già una soluzione di questo problema; tuttavia non mi pare inopportuno collegare col problema il nome di Hurwitz, per l'eleganza e semplicità del risultato, al quale quest'Autore ha saputo giungere. É da notarsi, peraltro, che al determinante di Hurwitz si può prevenire costruendo il risultante di Sylvester relativo ai due polinomî $a_0x^n + a_2x^{n-2} + \dots$, $a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + \dots$, che rientrano nelle considerazioni del Routh.

Consideriamo, in relazione con (1), il determinante d'ordine n

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & . & . & . & . & . & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & a_n \end{vmatrix},$$

che chiameremo *determinante di Hurwitz relativo al polinomio* $f(x)$; e poi consideriamo anche quest'altro:

$$(3) \qquad Q(y) = \begin{vmatrix} \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} & \frac{f^{(n)}(y)}{n!} & 0 & . & . & . & 0 \\ \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} & . & . & . & 0 \\ \frac{f^{(n-5)}(y)}{(n-5)!} & \frac{f^{(n-4)}(y)}{(n-4)!} & \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & f(y) \end{vmatrix}.$$

Esso è il determinante di Hurwitz relativo al polinomio in x

$$(4) \qquad \varphi(x) = f(x+y) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n + \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + f'(y)x + f(y).$$

Il determinante (3) è un polinomio in y: i suoi coefficienti sono funzioni razionali intere, abbastanza facilmente calcolabili, dei parametri a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Osservato ciò, noi vogliamo dimostrare questo teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $f(x) = 0$ *abbia negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che, oltre* $f(x)$, *anche il polinomio* $Q(y)$, *nella variabile* y, *abbia diversi da zero e di ugual segno tutti i suoi coefficienti.*

In tal modo noi giungiamo ad una nuova soluzione dell'importante problema. La critica ed il raffronto delle varie soluzioni avrebbero grande utilità; ma sfuggono intanto ai limiti di questa breve Nota.

2. Consideriamo quest'altra equazione, di grado m:

$$(5) \qquad C(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}x + c_m = 0,$$

dove, per semplicità (non restrittiva), sia $c_0 = 1$, ed i numeri $c_1, c_2, \ldots, c_m$ siano arbitrarî numeri, *reali o complessi*. Indichiamo con $-r$, $-r_2, \ldots,$

$-r_m$ le m radici dell'equazione (5); con ciò potremo scrivere

$$\mathrm{C}(x) = (x + r_1)(x + r_2) \ldots (x + r_m). \tag{6}$$

Chiamando ora Δ il determinante di Hurwitz relativo al polinomio $\mathrm{C}(x)$, dico che vale la formula

$$\Delta = c_m(r_1 + r_2)(r_1 + r_3) \ldots (r_1 + r_m) \ldots (r_{m-1} + r_m). \tag{7}$$

Nel secondo membro di questa formula s'intendono figurare tutte le $\binom{m}{2}$ somme binarie, ottenute combinando le m grandezze $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

La (7) si dimostra agevolmente per induzione. Intanto il polinomio di secondo grado

$$(x + r_1)(x + r_2) = x^2 + c_1 x + c_2$$

ha per determinante di Hurwitz il determinante

$$\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & 1 \\ 0 & r_1 r_2 \end{vmatrix}.$$

Esso vale $(r_1 + r_2) r_1 r_2$ cioè $c_2(r_1 + r_2)$; dunque la formula (7) è vera per $m = 2$.

Supponiamo che la (7) sia già dimostrata per il polinomio (6); e consideriamo il nuovo polinomio

$$\mathrm{K}(x) = (x + r)\,\mathrm{C}(x),$$

prodotto di $m + 1$ fattori lineari, invece che di m. Il suo coefficiente generico k_ν vale $c_\nu + rc_{\nu-1}$, dunque il determinante di Hurwitz relativo a $\mathrm{K}(x)$ sarà il determinante d'ordine $m + 1$

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} c_1 + rc_0 & c_0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_3 + rc_2 & c_2 + rc_1 & c_1 + rc_0 & \ldots & 0 \\ c_5 + rc_4 & c_4 + rc_3 & c_3 + rc_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & rc_m \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Se c_m è nullo, allora la (7) diventa $\Delta = 0$, ed è evidentemente verificata. Se c_m non è nullo, allora poniamo il determinante (8) nella forma

$$\mathrm{R} = rc_m \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \ldots & 0 & 0 \\ c_5 & c_4 & c_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_m & c_{m-1} \\ \pm r^m & \mp r^{m-1} & \pm r^{m-2} & \ldots & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Ed ora moltiplichiamo l'ultima colonna per c_m, e sommiamo colla precedente moltiplicata per $-c_{m-1}$, poi coll'antiprecedente moltiplicata per $c_{m-2}, \dots$, poi colla prima moltiplicata per $\pm c_0$. Così l'ultima colonna diventerà tutta di zeri, ad eccezione dell'ultimo elemento che diventerà $C(r)$. Ma allora si ottiene subito

$$rc_m^2 R = C(r)\,\Delta.$$

Per ipotesi, il valore di Δ è dato da (7), dunque si ottiene

$$R = rc_m(r + r_1)\dots(r + r_m)\dots(r_{m-1} + r_m).$$

Nel secondo membro di questa formula figura il termine noto rc_m del polinomio $K(x)$, e vi figurano tutte le $\binom{m+1}{2}$ somme binarie, ottenute combinando le $m + 1$ grandezze $r, r_1, r_2, \dots, r_m$. Ciò prova la generale validità della (7).

Da questa considerazione risulta chiaramente che l'annullarsi del determinante di Hurwitz, relativo ad un'equazione, accusa la presenza di qualche radice nulla di questa equazione, o di qualche coppia di radici opposte.

Risulta ancora un'altra verità (contenuta nel risultato di Hurwitz): se il determinante di Hurwitz relativo ad un'equazione a coefficienti reali non ha il segno di a_0, allora l'equazione non può avere negative tutte le radici reali e le parti reali delle radici complesse (¹).

3. Dopo queste premesse, riesce abbastanza semplice la dimostrazione del teorema che forma oggetto della presente Nota.

Le radici di $f(x) = 0$ siano $x_1, x_2, \dots, x_n$; e quelle di $\varphi(x) = 0$ siano $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Fra la ξ_ν generica e la x_ν vale la relazione

$$\xi_\nu + y = x_\nu. \tag{10}$$

Se $Q(y)$ non ha i coefficienti (delle potenze di y) di ugual segno, allora non può avvenire che tutte le sue radici $y_1, y_2, y_3, \dots$ abbiano le parti reali negative; ve ne sarà qualcuna per esempio $\eta + i\theta$, con parte reale η non negativa. Ma allora $\varphi(x) = f(x + \eta + i\theta)$, che ha $Q(\eta + i\theta) = 0$ per determinante di Hurwitz, non potrà avere tutte negative le sue radici reali e le parti reali delle sue radici complesse: ne avrà qualcuna $\alpha + i\beta$, colla parte reale α non negativa. Ma allora $f(x) = 0$ avrà la radice $\alpha + \eta + i(\beta + \theta)$, *con parte reale non negativa.* Ciò mostra, dunque, che, se $f(x) = 0$ ha negative tutte le sue radici reali e le parti reali delle sue radici complesse, allora il polinomio $Q(y)$, nella variabile y, deve avere tutti i coefficienti di ugual segno.

Ma tale condizione è anche sufficiente. Se, infatti, $f(x) = 0$ avesse qualche radice $\lambda + i\mu$, con parte reale λ non negativa, allora sarebbe $f(\lambda + i\mu) = 0$, e $\varphi(x) = f(x + \lambda)$ avrebbe la radice immaginaria pura $i\mu$; ma avrebbe anche la coniugata $-i\mu$, perchè ha i coefficienti reali; e $Q(\lambda)$, contenendo, per la (7), il fattore $i\mu - i\mu = 0$, dovrebbe essere nullo: dunque

(¹) Si capisce che la reciproca di questa proposizione non è vera.

$Q(y)$ avrebbe la radice reale non negativa λ. Perchè ciò non avvenga, basta che i coefficienti di $Q(y)$ abbiano lo stesso segno.

Rimane con ciò stabilita una nuova risoluzione del problema di Hurwitz; essa può riuscire di per sè utile e pratica, ma non tanto per questo essa è notevole, quanto per le diverse connessioni che fin da ora fa apparire fra campi per verità poco esplorati.

Meteorologia. — *Sul comportamento del mese di giugno nell'andamento annuale della temperatura in Italia.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Da diversi studiosi è stato notato come verso la metà di giugno soglia verificarsi un abbassamento della temperatura. Ragona [1] per Modena assegnò a tale abbassamento il periodo 30 maggio-12 giugno, De Giorgi [2] per Lecce il periodo 1 giugno-15 giugno, Eredia [3] per Catania il periodo 4 giugno-14 giugno. Rijkevorsel [4] notò come tale abbassamento soglia verificarsi in quasi tutta l'Europa nella prima decade, e Naccari [5] esaminando le temperature di Torino, Milano e Venezia concluse come tale abbassamento in Italia si estenda anche alla seconda metà.

In occasione di un notevole abbassamento di temperatura verificatesi nel giugno del 1903, Lancaster [6] rivolse un invito agli studiosi allo scopo di esaminare con più estensione tale fenomeno. Luizet [7], Moureaux [8], Gheorghin [9] apportarono il loro valido contributo esaminando le serie di osservazioni raccolte rispettivamente a Lione, Parc Saint-Maur (Parigi), Bucarest, e dalle quali risultò come l'abbassamento che si verifica intorno la metà di giugno, ha il vero carattere di un fenomeno periodico con carattere estensivo.

(1) Ragona D., *Andamento annuale della temperatura.* Roma, tip. Geminiana, 1876.

(2) De Giorgi C., *Note statistiche sul clima di Lecce nel ventennio 1875-1894.* Lecce 1895.

(3) Eredia F., *Sbalzi di temperatura e relazioni tra i massimi abbassamenti e i diversi elementi meteorologici.* Atti dell'Accademia Gioenia in Catania, serie III, volume XIII, (1900).

(4) Van Rijkevorsel E., Philosophical Magazine, May. 1898.

(5) Naccari A., *Intorno alle anomalie termiche dei climi di Torino, Milano e Venezia.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo XLIX, 1900.

(6) Lancaster A., *Les refroidissements du milieu de juin depuis vingt-ans.* Ciel et terre, 1903.

(7) Luizet M., *Sur les perturbations périodiques de la température en juin.* Ciel et terre, 1903.

(8) Moureaux Th., *Sur les refroidissements et les réchauffements de la température en juin.* Société Météorologique de France, 1903.

(9) Gr. Gheorghin G., *Le refroidissement du milieu de juin a Bucarest.* Jassy, 1905.