ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 16 ottobre 1910.

Astronomia. — *Sulla determinazione del tempo coi passaggi meridiani.* Nota del Corrispondente A. Abetti.

Nell'esercizio delle mie funzioni astronomiche fino dall'inizio della mia carriera io mi sono sempre sentito stimolato ad ottenere nelle mie determinazioni di tempo il migliore e più pronto risultato che potevano darmi i mezzi lasciati a mia disposizione, e feci studî e prove che mi portarono ad utili conseguenze già rese di pubblica ragione.

Innanzi tutto dirò che negli studî fatti trovai dapprima largo e benevolo consiglio da parte del mio direttore all'Osservatorio di Padova, il professore Lorenzoni che fu il mio maestro, poscia ebbi efficace cooperazione dal secondo astronomo di Arcetri l'attuale mio collaboratore prof. Viaro. Ed ora passerò a dire che in Padova, circa il 1875, allorquando ho potuto disporre dell'istrumento dei passaggi di Ertel *rapidamente invertibile* e *del cronografo*, ne profittai per mettere in uso la pratica di invertire l'asse di rotazione del cannocchiale sui suoi cuscinetti nel mezzo del passaggio di ogni oraria, così che ogni stella veniva osservata immediatamente nelle due posizioni, diretta ed invertita del cannocchiale agli stessi fili, per eliminare le distanze di questi e l'errore di collimazione, guadagnando in rapidità di osservazioni e di calcoli ed in precisione di risultati. Si comprende subito che con siffatta simmetria la media aritmetica t dei tempi dei passaggi agli stessi fili nelle due posizioni instrumentali anche di una sola stella prossima al zenit, ed essendo lo strumento bene rettificato in inclinazione [1] ed azimut, dà immediatamente col confronto AR — t (dove AR sta per ascen. retta), una sufficiente correzione Δt dell'orologio siderale registrante sul cronografo. È facile poi a questo punto pensare a due cose; primo che osservando la stessa stella da uno agli altri giorni seguenti si può avere con buona precisione anche l'*andamento medio diurno* dell'orologio; secondo che se i passaggi possono venire registrati automaticamente sulla striscia cronografica in causa dell'inseguimento della stella col filo mobile del micrometro (siccome verremo in cognizione più avanti in questo scritto) si raccoglieranno, con facilità e speditezza, un numero grande di doppi passaggi, i quali per la loro bontà e pel loro numero aumenteranno la precisione di t.

Ma abbandonando il vincolo della stella zenitale, e volendo dallo strumento dei passaggi, adoperato come qui s'intende, il maggior rendimento, considereremo che per ogni stella osservata debba essere,

$$\mathrm{AR} - t = \Delta t + az$$

dove a è il coefficiente d'azimut nella formola di Mayer e z l'azimut del cerchio massimo instrumentale *verticale*, a cui si riferisce il t che pertanto si intenderà, sempre, spoglio di i e della collimazione.

Con due equazioni simili date da due stelle diverse avremo Δt e z; ma la diversità deve esser tale per cui i due a sieno essi pure sensibilmente diversi, e meglio che mai di segno opposto. Quest'ultima condizione si verifica, come bene si sa, con una stella a sud del zenit detta *l'oraria*, e con un'altra a nord detta la *polare*; ed ora possiamo aggiungere che è così che negli osservatorî astronomici nacque la pratica di osservare due stelle siffatte per avere dalla loro combinazione le due incognite in discorso. Naturalmente i due valori di Δt dedotti da due sole equazioni concordano fino all'ultima cifra, ma quando si sieno osservate più stelle siamo in presenza di più equazioni della forma indicata dalle quali dovremo trarre i valori più probabili di Δt e z. Per fare ciò si potrebbero combinare le stelle con simmetria a due, a due, ammesso che fosse possibile averle scelte ed osservate a coppie simmetricamente intorno al zenit, e così si ricaverebbero valori separati di Δt e z i quali oltre alla loro grandezza ci darebbero altresì la loro variazione nell'intervallo delle osservazioni previo che queste sieno, dirò così, le più raffinate. Ma per un dato luogo una successione rapida di stelle circumzenitali formanti coppie appropriate all'intento non si trova nelle nostre

[1] Naturalmente ognuno che è pratico di passaggi meridiani sa come si tien conto di i colla livella, ma qui possiamo aggiungere che i si ha presto e bene, con tutta simmetria e spoglio dell'influenza dovuta alla differente grossezza dei perni, quando la livella è costantemente appesa all'asse come nel piccolo meridiano di Arcetri. Inoltre noteremo che quanto si dice valevole per una stella vale anche per il sole, col quale poi si può invertire due volte, una per ciascun lembo.

classiche odierne effemeridi, e per combinarle bisognerebbe lasciar andare perdute nel frattempo una più o stelle che bene servirebbero a dare equazioni della forma voluta. Piuttosto che lusingarmi con siffatte coppie, io, anni or sono, mi sentii invaghito pel metodo del Döllen in cui la stella boreale è una, e sempre la stessa in ogni istante che si voglia determinare il tempo, e le orarie sono le consuete come si succedono nelle effemeridi. Ed in proposito scrissi a Padova, nel 1880 una Nota [1] mostrando con un esempio siccome il metodo del Döllen, od altrimenti detto *del verticale della Polare* (α Ursae minoris), poteva coll' inversione rapida dello strumento, e col micrometro, esser ridotto ai minimi termini, cioè tanto spedito in osservazione e calcolo da meritare di essere impiegato correntemente specie negli osservatorî stabili. Ed a Padova ne feci buon uso, ed ebbi la compiacenza di vedersene interessare il prof. Lorenzoni, che tanto lo prese a cuore da volerlo impiegare colla mia collaborazione, nel 1882 ed 84, nella differenza di longitudine fra Padova ed Arcetri. Egli stesso fece allora i programmi e dettò la migliore e più semplice teoria come si trova esposta nella pubblicazione della Commissione Geodetica Italiana che ha per titolo: *Differenze di longitudine fra Roma, Padova ed Arcetri* (Padova, tip. del Seminario, 1891). Quantunque io fossi allora partigiano di tal metodo, così che venendo direttore nel 1894 in Arcetri, volli che il piccolo meridiano da me ideato ed ordinato a Bamberg in Berlino fosse provvisto della sottobase [Grundplatte mit Azimutalkorrektion] capace di pronti e regolari cambiamenti negli azimut della polare (che si sa essere contenuti entro un paio di gradi) tuttavia, sia perchè lo strumento tardasse a venire costringendomi ad adoperarne in sua vece altri meno adatti, sia perchè trovandomi ancora solo, sopraffatto di lavoro, dovessi ricorrere a mezzi ancor più sbrigativi, sia perchè incominciassi a vedere la cosa altrimenti, fatto sta che dal 1894 abbandonai in Arcetri la pratica di muovere lo strumento in azimut e mi imposi la nuova regola di mantenerlo costantemente nel solo verticale il più prossimo possibile al meridiano, per osservare quelle qualsiasi stelle (in numero di quattro, cinque per volta) che più prontamente venivano esibite dalle effemeridi di Berlino da me sempre preferite ed adoperate. Così facendo, entro un' ora o meno d' intervallo, venivo ogni volta a ritrovarmi con quattro, cinque o più equazioni, le quali io risolveva con un metodo mio proprio che dirò brevemente [AA] e che esposi in appendice al fasc. 6 delle pubblicazioni di Arcetri (fascicolo che contiene le osservazioni astronomiche del 1896), ed anzi là pubblicai un esempio in cui paragonai i risultati ottenuti con due strumenti dei passaggi che supplirono per turno il piccolo meridiano durante la sua attesa.

[1] *Sulla determinazione del tempo coll'osservazione dei passaggi delle stelle pel verticale della polare.* Atti dell' Istituto Veneto, vol. VI, ser. V, Venezia, 1880.

In seguito dimostrai nelle Memorie degli Spettroscopisti [1] la coincidenza del metodo [AA] con quello dei minimi quadrati *Mmq* [2]. Inoltre già fino dal 1898 mi era venuto in mente [3] di riguardare gli scarti v che si ottengono dalle equazioni di condizione, come dovuti all'andamento *attuale od istantaneo* dell'orologio (supposta l'ascensione retta delle stelle sicura entro $0^s.01$), e l'esposizione nel mio modo di vedere esemplificato con determinazioni di tempo occorse in misure di gravità relativa, fu esposto in appendice al fasc. 10 di Arcetri. Oggi questa veduta acquista anco più valore di fronte al perfezionamento con cui si ottiene il dato di partenza t, come si vedrà più avanti. Per intanto dirò che del metodo [AA] e di questa veduta si impadronì il prof. Viaro, il quale ne fece buon uso nel 1900 in occasione di misure di longitudine e gravità in Arcetri da parte dell'Istituto geografico militare (come si pubblicò nel fasc. 13), ed ora ne fa uso continuo nelle determinazioni correnti di tempo od in quelle necessarie ai suoi lavori di posizione di stelle.

Tutto quanto ho fin qui detto non avrebbe scopo di esser ricordato se non venisse a collegarsi coll'esistenza di due fatti recenti troppo intimamente connessi col problema mio favorito perchè io ne possa tacere specialmente lusingandomi che parlandone si possa far cosa utile.

Il primo fatto si è l'applicazione del micrometro *registratore* [4] al Piccolo Meridiano, il secondo la trattazione generale teorica del metodo [AA] per qualsiasi numero di incognite fatta dal prof. Viaro. Egli scrisse per l'uno e per l'altra due Memorie intitolate:

I. *Il micrometro autoregistratore del Piccolo Meridiano di Arcetri.* Mem. degli Spettroscopisti, vol. XXXIX, anno 1910.

II. *Sopra un procedimento che può in qualche caso venire utilizzato nella trattazione coi minimi quadrati di una serie di equazioni di condizione.* Riv. di fisica, mat., e Sc. nat. di Pavia, 1910, anno XI.

Indicherò più avanti questa seconda Memoria brevemente con V II quando avrò bisogno di citare le formole che fanno al caso di questa mia trattazione. E quanto alla I non ho altro da aggiungere oltre al titolo, se non l'augurio che possa esser letta dai giovani astronomi e li invaghisca ad attivare questo mezzo per registrare i passaggi sulla striscia cronografica siccome quello che rappresenta un significante progresso sui vecchi metodi dell'orecchio e del tasto a mano.

(1) Vol. XXXIII, anno 1904. Il titolo della Nota si troverà dato più avanti nell'Appendice.

(2) La coincidenza esistendo, diventa il metodo [AA] un abbreviato dell'altro: noi lo diciamo delle *Residue*, cioè il metodo dei *Mmq* applicato alle equazioni residue.

(3) Cfr. Lorenzoni, *Differenze di longitudine fra Roma, Padova ed Arcetri.*

(4) Recentemente, noi ad Arcetri, abbiamo convenuto di chiamarlo così anzichè *autoregistratore.*

Ciò posto venne a me in mente siccome cosa utile e meritevole di esser resa di pubblica ragione quella di esporre le ultime nostre conclusioni fatte in Arcetri, intorno al problema della determinazione di tempo coi passaggi meridiani, illustrandole con un esempio esauriente istituito a bella posta dal prof. Viaro al Piccolo Meridiano, ora provvisto del micrometro registratore.

Assumiamo l'equazione di condizione già prima veduta, e scritta così:

(1) $$\Delta t + az = \mathrm{AR} - t$$

e ricorderemo che:

Δt, prima incognita, è la correzione dell'orologio siderale;

z, seconda incognita, è l'azimut instrumentale;

a, è il coefficiente della formola di Mayer $\dfrac{\mathrm{sen}(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$;

t, è il tempo del passaggio della stella pel cerchio massimo instrumentale verticale; cioè il medio di parecchi doppî passaggi registrati dal micrometro sulla striscia cronografica nelle due posizioni diretta ed invertita dello strumento; inoltre tale medio s'intende corretto dell'inclinazione i fornita dalla livella che sta sempre appesa e che s'inverte ad un tempo coll'asse di rotazione;

AR, è l'asc. retta apparente, corretta dell'aberrazione diurna.

Da una serie n di equazioni della forma (1) avremo l'equazione media,

(2) $$\Delta t + \frac{[a]}{n} z = \frac{[\mathrm{AR} - t]}{n}$$

dove le parentesi quadre indicano come il solito, una somma; la somma degli n coefficienti di z oppure degli n termini noti. Sottraendo la (2) da tutte le n equazioni (1) ne ricaveremo altrettante che possiamo rappresentare con questa:

(3) $$\alpha z = \lambda$$

in cui si trova eliminata la Δt, ed α e λ rappresentano le differenze tra i singoli valori di a e di $\mathrm{AR} - t$ dal rispettivo medio, e sono quindi piccole quantità che si prestano ad un calcolo rapidissimo (1). Infatti dalle n equa-

(1) Se nell'equazione (2) risultasse per caso $[a] = 0$ allora si avrebbe subito il valore di Δt, eguale al medio

$$\frac{[\mathrm{AR} - t]}{n}$$

e questo valore introdotto nella (1) darebbe:

$$az = \lambda$$

così che l'equazione normale corrispondente risulterebbe eguale a:

$$[aa]\, z = [a\lambda].$$

zioni (3) avremo facilmente la normale,

$$[\alpha\alpha]\,z = [\alpha\lambda]$$

operando con tavole di moltiplicazione a due fattori [1] poscia colle medesime, od in altri modi semplicissimi, si ricaverà,

$$z = \frac{[\alpha\lambda]}{[\alpha\alpha]}\,, \tag{4}$$

e diremo allora che l'azimut si ha prontamente dal rapporto fra due somme, una di prodotti, l'altra di quadrati, ambedue di piccoli numeri a due cifre decimali.

Trovato z l'equazione media (2) darà subito mediante un piccolo prodotto ed una sottrazione, il Δt, che essendo allora ed in tal guisa un valore completamente determinato lo indichiamo con Δt_m.

Giunti a questo punto viene in campo la Memoria VII colla quale possiamo aggiungere alle formole (4) e (2), che dànno z e Δt, quelle che dànno i loro pesi Pz e $P\Delta t_m$. Trascriviamo dunque da pag. 489 di VII le formole che seguono, e che sono le reciproche dei pesi,

$$Q_{11} = \frac{1}{[\alpha\alpha]} \qquad Q_{00} = \frac{1}{n} + \frac{[a]^2}{n^2[\alpha\alpha]}\,.$$

Ora essendo che a α ed n hanno lo stesso significato tanto in VII quanto qui da noi, potremo scrivere,

$$Pz = [\alpha\alpha] \tag{5}$$

$$\frac{1}{P\Delta t_m} = \frac{1}{n} + \frac{[a]^2}{n^2 Pz}$$

e ponendo $\frac{[a]^2}{n\,Pz} = k^2$, similmente come in VII, scriveremo,

$$P\Delta t_m = \frac{n}{1+k^2}\,. \tag{6}$$

Sopra questi pesi possiamo argomentare:

1°) Che l'azimut sarà sempre bene determinato quando i coefficienti a abbiano valori sensibili e differenti tra loro affinchè le differenze α che risultano dal paragone col medio $\frac{[a]}{n}$ sieno pur esse sensibili e dieno un buon numero per $[\alpha\alpha]$; a prescindere però dalle stelle troppo boreali di cui diremo subito.

2°) Che il Δt_m sarà tanto meglio determinato quanto maggiore sarà il numero n delle stelle osservate. Siccome poi k^2 è una quantità essenzial-

[1] Di tali tavole feci io pure una pubblicazione per questo scopo nel 1897 qui a Firenze nella tipografia Carnesecchi e figli, intitolandola: *Tavole di moltiplicazione per fattori di una e due cifre ed indicazione dei quadrati dei fattori in cima alla pagina.*

mente positiva, si vede che il peso di Δt_m si accosta tanto più al numero delle stelle osservate quanto più piccolo è k^2. Sulla sua piccolezza parla di per sè la frazione che lo esprime, ma noteremo che in essa a denominatore si trova il P_z, laonde abbiamo di conseguenza che il maggior peso di z torna anche a benefizio del maggior peso di Δt_m.

Non è poi da credere come vantaggiosa l'inclusione, nelle osservazioni, di stelle *molto boreali* a motivo del loro grande e negativo coefficiente a perchè se per esso P_z sarà un gran numero, d'altra parte avremo scapito in $AR - t$ perchè le stelle *molto boreali* non possono offrire dei t omogenei con quelli delle altre stelle e massimamente con quelle più veloci come sono le equatoriali. Quindi se una polare può convenire per una buona determinazione di z e Δt con una sola combinazione di due equazioni fra essa ed una oraria non conviene più quando le equazioni sono molte e si vogliono trattare col metodo esposto perchè l'uso suo implica che le equazioni sieno tutte abbastanza omogenee [1].

Intorno al zenit i valori di a sono simmetrici, non così quelli di t per riguardo alle velocità delle stelle, ne viene che le equazioni omogenee si avrebbero, alle nostre latitudini, con stelle aventi una declinazione $\frac{1}{2}(0° + 45°)$, ma d'altra parte abbiamo veduto che gli a devono essere fra loro diversi, perciò diremo che evitando le stelle molto boreali, polarissime, e per ovvie ragioni anche quelle molto australi, avremo libera scelta fra quelle comprese in una zona limitata, all'incirca, dai paralleli $-10°$ e $+60°$, nè si temerà di sconfinarla di qualche grado come mostra anche l'esempio qui esibito, in cui la stella più boreale è δ *Draconis* con $\delta = +67°.5$ e la più australe ν *Aquarii* con $\delta = -11°.7$.

Nelle effemeridi di Berlino si vedrà che malgrado la restrizione fatta le stelle si succedono abbastanza rapidamente; come del resto prova l'unito esempio dove troveremo osservate 8 stelle in $^3/_4$ d'ora, il che dà un intervallo medio di circa 6^m fra l'una e l'altra, e si capisce come nei frattempi si sarebbero potute interpolare stelle incognite di cui occorrono le coordinate, che è quanto poi fa il prof. Viaro col Piccolo Meridiano.

[1] Chiamando v la velocità di una stella oraria equatoriale, sarà $v \cos \delta$ quella della polare, e chiamando ancora σ uno spazio qualsivoglia del campo del cannocchiale, avremo che il tempo t_0 sul quale s'indugia l'oraria sarà espresso da σ/v, e quello t_p della polare da $\sigma/v \cos \delta$; dunque potremo dire $t_o : t_p = 1 : \sec \delta$.

Ora agli 88°.51′ di declinazione che competono attualmente ad α *Ursae minoris* corrisponde una $\sec \delta = 49$, quindi su di uno spazio $\sigma = 1''.5$ come può essere la grossezza di un filo, la polare propriamente detta indugia $4^s.9$ mentre l'equatoriale indugierebbe $1''5/15 = 0^s.1$. L'errore unitario di un solo doppio passaggio registrato col tasto, o col micrometro, è per verità minore di $0^s.1$ (v. la Memoria I di Viaro) ma la relazione fra i due numeri 4.9 e 0.1, che è poi quella di $\sec \delta = 49$, rimane la stessa; e tanto basta a provare la non omogeneità fra i t delle orarie e quelli delle stelle troppo boreali; che potremo chiamare polarissime.

Prima di passare all'esempio devo ancora dire quanto segue circa il peso delle incognite. Il peso di per se stesso è un rapporto, o numero astratto che non può avere significazione se noi ignorassimo i termini che lo costituiscono, cioè l'error medio unitario ε_1 (o probabile; ma noi ora non facciamo sempre uso del medio, per maggior speditezza) e l'error medio ε del risultato a cui viene attribuito il peso P. Si sa essere

$$P = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2}$$

e pertanto avendo il peso, e l'errore unitario, saremo in grado di ricavare ε per avere una giusta e pratica idea della precisione o bontà dei risultati Δt_m e z. E quanto al primo, che maggiormente ci interessa, possiamo dir subito, ispezionando qui avanti il quadro II, ultima colonna, che i risultati offerti dal prof. Viaro per i tre valori separati di Δt medî di 8 stelle ciascuno ammettono una precisione intorno al centesimo di secondo in tempo.

Resta ora da trovare ε_1 e ciò si farà calcolando i residui v dalle equazioni (1) introducendovi per le incognite i valori trovati e risultandone

$$v = (\mathrm{AR} - t) - (\Delta t_m + az)$$

e così dagli n valori di v avremo ε_1 colla ben nota formola

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}. \tag{7}$$

Quando in una sera si saranno osservate molte stelle distribuite in un intervallo di parecchie ore come è il caso della determinazione di posizione di stelle incognite, od in sostanza dei lavori di cataloghi stellari, oppure di lavori di longitudine o di gravità, si dovranno trattare le n equazioni di condizione (1) in più gruppi, o più serie, come dir si voglia, per averne altrettanti valori medî di Δt e di z con cui si potrà anche stabilire la variazione di questi elementi; ossia l'andamento orario dell'orologio ed il comportamento orario dello strumento rispetto all'azimut [1]. Il procedimento di calcolo di una tale variazione sarà identico per l'uno e per l'altro elemento e qui basterà considerarne uno, il Δt.

Supponiamo dunque di avere $2, 3, \ldots, s$ determinazioni di Δt fatte in una stessa sera e corrispondenti ai tempi T_1 T_2 ecc. espressi in ore e frazioni decimali di ora; intanto osserveremo che col millesimo di ora si

[1] La variazione dell'azimut è naturalmente cosa diversa da quella congenita dell'orologio, ma del pari come l'inclinazione e la collimazione (quando si calcola), l'azimut per singole determinazioni offrirà sempre valori fra loro diversi, ora nel modo proposto si potrà vedere se la diversità ammette una proporzione col tempo e siccome dovrebbe essere per plausibile ipotesi.

terrà conto del mezzo decimo di minuto che corrisponde a 3^s, poscia potremo stabilire questa nuova equazione di condizione:

$$\Delta t_0 + (T_1 - T_0)\, y = \Delta t \tag{8}$$

dove Δt_0 sarà quel valore che assume Δt al tempo T_0 quando lo si spogli dell'andamento orario y moltiplicato per l'intervallo di tempo $(T_1 - T_0)$. E così intendendo per gli altri intervalli relativi a $T_2\, T_3$ ecc., avremo in tutto s equazioni rappresentate dalla (8). Queste s equazioni sommate ci daranno:

$$s\Delta t_0 + [T - T_0]\, y = [\Delta t], \tag{9}$$

dove colla parentesi quadra intendiamo indicata, come prima, una somma, e dove si è scritto T in luogo di T_1 intendendo che al primo competono, nello sviluppo della somma, tutti gli indici da 1 ad s. Adesso osserviamo che se per T_0 si sceglie il medio dei tempi $T_1\, T_2 \ldots\ldots$ sarà la somma $[T - T_0] = 0$ e quindi:

$$\Delta t_0 = \frac{[\Delta t]}{s} \tag{10}$$

cioè Δt_0 sarà il medio delle s determinazioni e corrisponderà al medio dei tempi T_0. Trovato questo se si ritorna alle equazioni (8) chiamando per brevità gl'intervalli di tempo con τ, e le differenze fra i Δt e Δt_0 con v si avrà

$$\tau y = v$$

e dalle s equazioni simili a questa avremo la normale

$$[\tau\tau]\, y = [\tau v]$$

da cui

$$y = \frac{[\tau v]}{[\tau\tau]} \tag{11}$$

che sarà la variazione oraria di Δt_0 a partire da T_0; od altrimenti diremo esser y l'*andamento orario* dell'orologio. Applicando ora ad y e Δt_0 le formole (5) e (6) dei pesi colle modificazioni dovute, troveremo:

$$P y = [\tau\tau] \tag{12}$$

poscia

$$P\Delta t_0 = \frac{s}{1 + k^2}$$

ma per essere in questo caso $[\tau] = 0$ sarà

$$k^2 = \frac{[\tau]^2}{sPy} = 0,$$

e perciò

$$P\Delta t_0 = s.$$

Ne concludiamo che il peso di y dipende dalla grandezza degli intervalli di tempo τ e che il peso di Δt_0 dipende dalle serie in cui fu diviso l'intero periodo di osservazione. Ma qui pure oltre al peso occorre l'errore unitario ε_1 che poscia diviso per le radici dei pesi darà gli errori ε di y e Δt_0 che ci faranno giudicare della bontà di questi risultati. Pertanto si calcoleranno colla formola (8) e coi valori Δt_0 ed y i valori Δt che paragonati con quelli di partenza daranno dei nuovi v da cui avremo,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{s-2}}$$

Esempio.

Il prof. Viaro la sera dell' 8 settembre 1910, che fu di bel sereno, fece espressamente tre determinazioni di tempo al Piccolo Meridiano di Arcetri, osservando 24 stelle delle effemeridi di Berlino ed adoperando il micrometro registratore. Spogliò poscia 30 doppî passaggi per ogni stella e ne ricavò i t, che corretti per l'inclinazione e per l'ampiezza del contatto, divise in tre gruppi, ciascuno dei quali conta otto stelle. Composte le equazioni, le calcolò e mi fornì i materiali per i due quadri seguenti:

Quadro I.

Stella	AR 8 settembre 1910 (h m s)	Equazioni di condizione (m s)	Δt (m s)
η Serp.	18 16 41	$\Delta t + 0.73\,z = -$ 2 27.462	$-$ 2 27.816
109 Herc.	18 19 53	$+ 0.40$ 27.684	878
b Drac.	18 22 37	$- 0.50$ 27.082	839
α Lyrae	18 33 55	$+ 0.11$ 27.804	857
110 Herc.	18 41 49	$+ 0.42$ 27.637	841
β Lyrae	18 46 47	$+ 0.22$ 27.726	833
R Lyrae	18 52 37	0.00 27.819	819
ζ Aquil.	19 1 18	$+ 0.51$ 27.600	847
	18 36 57		$-$ 2 27.841
δ Drac.	19 12 34	$\Delta t - 1.05\,z = -$ 2 28.296	$-$ 2 27.813
δ Aquil.	19 21 0	$+ 0.66$ 27.545	849
β Cygni	19 27 7	$+ 0.31$ 27.674	817
ϑ Cygni	19 34 3	$- 0.17$ 27.929	851
γ Aquil.	19 42 1	$+ 0.56$ 27.525	783
α Aquil.	19 46 26	$+ 0.58$ 27.532	799
γ Sagit.	19 54 47	$+ 0.44$ 27.630	832
ϑ Aquil.	20 6 42	$+ 0.71$ 27 513	840
	19 38 5		$-$ 2 27.823
γ Cygni	20 19 2	$\Delta t + 0.09\,z = -$ 2 27.798	$-$ 2 27.833
ϑ Ceph.	20 28 7	$- 0.71$ 28.059	782
β Delph.	20 33 22	$+ 0.51$ 27.570	769
α Cygni	20 38 24	$- 0.03$ 27.814	802
ε Aqu.	20 42 51	$+ 0.82$ 27.498	818
32 Vulp.	20 50 46	$+ 0.31$ 72.712	833
ν Cygni	20 53 51	$+ 0.07$ 27.809	836
ν Aqu.	21 4 44	$+ 0.84$ 27.457	785
	20 41 23		$-$ 2 27.708

QUADRO II.

T	ε_1	Pz	$P\Delta t$	z		Δt	
$18^h 36^m 57^s$	$\pm 0^s.022$	0.994	5.520	$+0^s.485$	$\pm 0^s.022$	$-2^m 27^s.841$	$\pm 0^s.009$
19 38 5	0.026	2.491	6.618	0.460	0.017	823	0.010
20 41 23	0.029	1.801	6.397	0.340	0 021	807	0.011
19 38 48						-2 27.8237	

Ispezionando i risultati offerti per Δt dal quadro II, ultima colonna, vedremo che oltre all'essere ciascuna delle tre determinazioni sicura entro il centesimo di secondo i tre valori vanno diminuendo regolarmente col crescere del tempo. Per tanto non è fuor di proposito calcolare sopra di essi l'andamento y.

Facendo la differenza fra i tre singoli valori di T e di Δt dal loro medio che sta scritto di sotto, avremo:

τ	v
$-1^h 1^m 51^s$	$-0^s.0173$
-0 0 43	$+0.0007$
$+1$ 2 35	$+0.0167$

da cui le equazioni di condizione:

$$-1^h.031y = -0^s.0173$$
$$-0\ .012 \qquad +0\ .0007$$
$$+1\ .043 \qquad +0\ .0167$$

Per formare agevolmente l'equazione normale che deve darci y riduciamo i due membri a numeri interi moltiplicandoli per 10 mila, ma poi prendiamo anche la y dieci volte più grande per ridurci a quattro cifre significative soltanto, e scriviamo dunque le equazioni come segue:

$$-1031(10y) = -173$$
$$-\quad 12 \qquad +\quad 7$$
$$+1043 \qquad +167$$

Adesso la formazione della normale è ridotta a poca cosa, impiegando le tavole di moltiplicazione a fattori di quattro cifre di Peters (¹). Infatti avremo:

$$2150954(10y) = 352460$$

da cui

$$10y = \frac{352460}{2150954}.$$

Per eseguire la divisione basta considerare il divisore ridotto alle quattro prime cifre 2151 e la pagina 045 e la colonna 2 delle suddette tavole di Peters ci mostrerà i prodotti che colle loro cifre più si accostano al dividendo, e ne ricaveremo con due tratti di penna,

$$10y = 0.1639$$

da cui

$$y = +\,0^s.01639\,.$$

Se ora con Δt_0 ed y si calcolano i Δt avremo quanto segue:

$$\begin{array}{rr} -\,2^m\,27^s.8237 - 1^h.031y = & -\,2^m\,27^s.8406 \\ -\,0\,.012 & 27\,.8239 \\ +\,1\,.043 & 27\,.8066 \end{array}$$

e dal paragone di questa rappresentazione dei Δt con quelli del quadro II ne vengono questi nuovi v

$$\begin{array}{r} -\,0^s.0004 \\ +\,0\,.0009 \\ -\,0\,.0004 \end{array}$$

che ci forniscono l'errore medio unitario

$$\varepsilon_1 = \pm\,0^s.0011\,.$$

Quanto ai pesi è subito visto che quello di y è il due che proviene da $[\tau\tau] = 1^h + 1^h$ e quello di Δt_0 è il tre, laonde i valori di ε corrispondenti a quelle due quantità sono rispettivamente $\pm\,0^s.0008$ $\pm\,0^s.0006$ ed indicano una precisione entro il millesimo di secondo, cioè entro la terza decimale; però in y bisognerà sempre computare la quarta per poter assicurare la terza nel prodotto τy.

Supposto dunque che la serata dell' 8 settembre 1910 consacrata dal prof. Viaro a questo esempio, fosse stata impiegata anche per altri scopi,

(¹) Dott. J. Peters, *Neue Rechentafeln für multiplikation und division mit allen ein-bis vierstelligen Zahlen.* Berlin, Druck und Verlag von Georg Reimer, 1909.

siccome quelli dianzi avvertiti, formazione di cataloghi, differenze di longitudine o di gravità, il risultato finale a cui siamo giunti, e che qui trascrivo:

$$\Delta t_0 = -2^m\,27^s.8237 + 0.0164\,\tau$$

sarebbe stato capace di dare la correzione dell'orologio, che fu il pendolo normale, per *qualsiasi istante* prima e dopo il tempo siderale $T_0 = 19^h.38^m.48^s$ ed in tutto l'intervallo di $2^h\,48^m$ in cui durarono le osservazioni.

Siccome poi il valore $-2^m\,27^s.8237$ ha il suo errore ε_t ed y ha il suo ε_y sarà per ogni altro valore di Δt

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_t^2 + \varepsilon_y^2}$$

Supposto $\tau = 1^h$ e tenendo conto dell'ordine delle decimali avremo

$$\varepsilon = \sqrt{\{64 + 36\}} = \sqrt{100} \text{ dell' } 8^a \text{ cifra}$$

quindi

$$\varepsilon = \pm 10 \text{ della } 4^a \text{ cifra,}$$

ovvero

$$\varepsilon = \pm 0^s.0010\,,$$

cioè il Δt interpolato per 1^h sarà esatto entro il millesimo di secondo ciò che prima del micrometro registratore non era.

Naturalmente esistendo uno di quegli scopi prefati, l'intervallo sarebbe stato certamente più lungo, ma con ciò, *ceteris paribus*, nulla si sarebbe perduto; anzi y avrebbe guadagnato in peso.

Appendice.

Nella Memoria VII si trovano nelle due ultime righe di pag. 499 (¹) anche le formole per determinare i pesi delle costanti delle lastre fotografiche dei cataloghi stellari fotografici, formole le quali pure possiamo vedere applicate come ora dirò. Ricordo intanto che intorno al modo di ricavare i valori più probabili di dette costanti con un procedimento analogo a quello relativo al Δt e z io scrissi nel vol. XXXIII degli Spettroscopisti la Nota intitolata: *Sulla trattazione coi minimi quadrati di due casi speciali di equazioni di condizione*, casi che sono appunto la determinazione del tempo, e la determinazione delle quattro costanti delle lastre fotografiche di Catania. Or bene, avendo io chiamate quelle costanti A A′B C e notando che le due prime si riferiscono alle coordinato del punto di origine delle misure, e le due ultime all'orientamento ed alla scala, venni a trovare, applicando le

(¹) § 7, Caso III di $2n$ equazioni fra le incognite $x_0\,x'_0\,x_1\,x_2$.

formole VII all'esempio dato per la lastra n. 1668, le relazioni di peso che darò subito dopo questi valori,

$$A = -0.47096$$
$$A' = +0.12092$$
$$B = -0.00076$$
$$C = +0.00825$$

trascritti dalla trattazione suddetta.

Il peso delle due prime è unico ed eguale a circa il numero delle stelle di riferimento, in tutte 14; il peso delle B C è pure unico ed eguale a 100 volte la somma,

$$[aa] = [bb] = 376{,}3364 .$$

Il fattore 100 entra in giuoco perchè nella mia trattazione i coefficienti delle B e C sono stati *a priori*, per comodità e speditezza di calcolo, divisi per 10 senza scapito di esattezza, come è confermato ragionando sui due numeri 14 e 37634. La loro grande disparità dipende dall'ordine diverso dei due gruppi di costanti; e mentre le due prime A A′ esigono il maggior numero possibile di stelle di riferimento, al di là anche di 14, le altre due BC restano più che bene determinate limitando *a priori* nelle equazioni di condizione il numero delle decimali. E con ciò il calcolo col metodo dei *Mmq* applicato alle Residue [1] diventa assai sbrigativo ed assai sicuro; ed oggi, dopo questa indagine, dobbiamo dire che esso supera qualsiasi altro procedimento perchè escludendo ogni arbitrarietà offre, senza gran fatica, e senza spreco di tempo, i più probabili valori delle costanti .

[1] Il metodo delle Residue viene ora impiegato a Catania. Cfr. *Catalogo Astrofotografico*, vol. VI. parte I, anno 1909. Indipendentemente da me anche Trépied si accorse dell'opportunità delle Residue. Cfr. *Catalogue Photographique d'Alger. Introduction*, pag. LIII. *Résolution des eqnation.*

A questo punto mi sia permesso di dire un'altra cosa d'interesse dei cataloghi stellari-fotografici, ed è questa. Che il sig. Lagarde, astronomo di Parigi, fece opera utilissima divulgando una sua preziosa pubblicazione unificante i modi di servirsi di detti cataloghi. Essa insegna ad avere presto e bene, senza penose indagini le posizioni delle stelle, malgrado le diversità con cui detti cataloghi si preparano. Il titolo della pubblicazione, la quale fu recentemente a noi regalata dal chiarissimo Autore in tre esemplari, è il seguente: *Formules et tables pour faciliter l'emploi des catalogues photographiques en coordonnées rectilignes.*