ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sul gradiente di una omografia vettoriale.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella teoria delle omografie vettoriali — esposta dai prof. C. Burali-Forti e R. Marcolongo nell'ottimo volumetto: *Omografie vettoriali con applicazioni* ecc. (G. B. Petrini, Torino, a. 1909) (1) — è molto importante, sovratutto dal punto di vista delle applicazioni, la considerazione di un certo vettore, dipendente unicamente da una data omografia vettoriale, e che dicesi *gradiente* dell'omografia considerata (2).

Tale vettore è stato introdotto, dai predetti autori, mediante il riferimento ad una terna di vettori unitarî ortogonali; si dimostra però che esso non cambia, comunque varii la terna suddetta, in guisa che il gradiente di una omografia è funzione soltanto dell'omografia stessa.

Si capisce quindi come dovesse esser possibile (e desiderabile) — benchè il modo di giungervi fosse tutt'altro che ovvio (3) — di definire il gradiente di una omografia indipendentemente da ogni terna di riferimento; e ciò appunto mi è riuscito di ottenere, in modo assai semplice, per mezzo della definizione (1), o della equivalente (1'). In conseguenza della nuova definizione, vengono semplificate le dimostrazioni di varie formule, relative al gradiente di particolari omografie; e tali dimostrazioni espongo pure in questa breve Nota.

Per ultimo dimostro una nuova formula relativa alle omografie vettoriali, dalla quale si può subito dedurre la dimostrazione di una identità molto importante, che lega le potenze di un'omografia e i suoi invarianti. Tale identità è dimostrata, nel volumetto sopra citato, dapprima nel caso in cui l'omografia ha tre direzioni unite distinte (e allora la dimostrazione è immediata), poi è accennata la dimostrazione nel caso di un'omografia qualsiasi; questa dimostrazione conduce però a calcoli alquanto complicati (4); quella che espongo qui, mi pare invece semplicissima.

Dall'identità in questione si deduce poi, fra altro, che gli invarianti del prodotto di più omografie sono indipendenti dall'ordine dei fattori.

(1) Nelle citazioni, indicherò questo libro semplicemente con (*O. v.*).

(2) Questo vettore venne considerato, la prima volta, dal prof. C. Burali-Forti nella Nota: *Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella meccanica*, pag. 12 (in nota). Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII, a. 1906-07.

(3) Infatti a pag. 51 del citato libro, dopo stabilita la formula: $(\mathrm{grad}\, m) \times d\mathrm{P} = dm$, ove m è un numero funzione del punto P, gli autori dicono che essa « pare non abbia la sua corrispondente per una omografia qualunque che non sia un numero ».

(4) Tanto è vero che gli autori soggiungono (pag. 10) che « sarebbe interessante trovare una dimostrazione diretta più semplice di quella che ora abbiamo accennata ».

1. Sia α un'omografia vettoriale, funzione del punto P variabile in un campo a tre dimensioni; con la notazione $\mathrm{grad}_P\,\alpha$, o, quando non vi possa esser luogo ad equivoci, semplicemente $\mathrm{grad}\,\alpha$, che si legge « gradiente (rispetto a P) di α », si indica il vettore, funzione di α e di P soltanto, tale che

$$(1)\qquad (\mathrm{grad}\,\alpha)\times dP = I_1\,\frac{d(K\alpha dP)}{dP},$$

qualunque sia lo spostamento (vettore) dP di P.

Si riconosce subito che, se il vettore $\mathrm{grad}\,\alpha$ esiste, esso è unico. Infatti se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sono due vettori funzioni di α e di P soltanto, tali che

$$\mathbf{x}\times dP = \mathbf{y}\times dP = I_1\,\frac{d(K\alpha dP)}{dP},$$

si ha:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})\times dP = 0,$$

qualunque sia lo spostamento dP nel campo considerato, perciò: $\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

Se α, β sono omografie funzioni di P, si ha:

$$(2)\qquad \mathrm{grad}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{grad}\,\alpha + \mathrm{grad}\,\beta,$$

come si deduce subito dalla (1).

Indicheremo, anche nel seguito, con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tre vettori unitari, formanti una terna ortogonale destrogira. Si ha allora:

$$(3)\qquad \mathrm{grad}\,\alpha = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{i}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{j}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{k}\right)\mathbf{k}.$$

Infatti, dalla (1), ricordando l'espressione dell'invariante primo di una omografia (*O. v.*, pag. 8, [4]) si ha:

$$(\mathrm{grad}\,\alpha)\times dP = \mathbf{i}\times\frac{d(K\alpha dP)}{dP}\mathbf{i} + \mathbf{j}\times\frac{d(K\alpha dP)}{dP}\mathbf{j} + \cdots,$$

ovvero (*O. v.*, pag. 47, [7], [9']):

$$(\mathrm{grad}\,\alpha)\times dP = \mathbf{i}\times K\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{i}\right)dP + \mathbf{j}\times K\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{j}\right)dP + \cdots,$$

cioè (*O. v.*, pag. 18, [6]):

$$(\mathrm{grad}\,\alpha)\times dP = dP\times\left[\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{i}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{j}\right)\mathbf{j} + \cdots\right],$$

da cui segue la (3). È precisamente la formula (3) che è stata assunta in *O. v.*, pag. 49, [1], come definizione di $\mathrm{grad}\,\alpha$.

Se m è un numero funzione di P, ed $\mathbf{x}$ è un vettore qualunque, il gradiente di m ha con $\frac{dm}{dP}$ la relazione semplice indicata dalla formula:

$$(4) \qquad (\text{grad}\, m) \times \mathbf{x} = \frac{dm}{dP}\,\mathbf{x},$$

dalla quale, assumendo, in particolare, $\mathbf{x} = dP$, risulta:

$$(4') \qquad (\text{grad}\, m) \times dP = dm.$$

La (4) si può dimostrare col procedimento stesso adoperato in *O. v.*, pag. 51. Così pure rimangono immutate le dimostrazioni delle formule [5]-[17] del n. 23 di *O. v.*

2. Ricordando che la divergenza di un vettore $\mathbf{u}$ funzione di P, si può definire colla formula (*O. v.*, pag. 56, [2]):

$$(5) \qquad \text{div}\,\mathbf{u} = I_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP},$$

si può sostituire alla (1) la seguente definizione:

$$(1') \qquad (\text{grad}\,\alpha) \times dP = \text{div}(K\alpha dP).$$

La rotazione di $\mathbf{u}$ si può definire così (*O. v.*, pag. 56, [1]):

$$\text{rot}\,\mathbf{u} = 2V \frac{d\mathbf{u}}{dP},$$

e col procedimento stesso di *O. v.*, pag. 57, si stabiliscono le formule

$$(6) \qquad \text{rot}(m\mathbf{u}) = m\,\text{rot}\,\mathbf{u} + (\text{grad}\,m) \wedge \mathbf{u}$$

$$(7) \qquad \text{div}(m\mathbf{u}) = m\,\text{div}\,\mathbf{u} + (\text{grad}\,m) \times \mathbf{u}$$

$$(8) \qquad \text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \text{rot}\,\mathbf{v},$$

ove $\mathbf{v}$ è un vettore funzione di P.

Ciò premesso, se $\mathbf{a}$ è un vettore costante, è facile dimostrare che:

$$(9) \quad (\text{grad}\,\alpha) \times \mathbf{a} = \text{div}(K\alpha\mathbf{a})$$

$$(10) \quad \text{grad}\,\alpha = \mathbf{i}\,\text{div}(K\alpha\mathbf{i}) + \mathbf{j}\,\text{div}(K\alpha\mathbf{j}) + \mathbf{k}\,\text{div}(K\alpha\mathbf{k}), \quad (\textit{O. v.}, \text{pag. } 58, [14])$$

$$(11) \quad \text{grad}(m\alpha) = m\,\text{grad}\,\alpha + \alpha(\text{grad}\,m), \quad (\textit{O. v.}, \text{pag. } 50, [2])$$

$$(12) \quad \text{grad}(\mathbf{u}\wedge) = -\,\text{rot}\,\mathbf{u}, \quad (\textit{O. v.}, \text{pag. } 58, [13])$$

$$(13) \quad \text{grad}\left(K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = \text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{u}, \quad (\textit{O. v.}, \text{pag. } 59, [16])$$

$$(14) \quad \text{grad}\,\frac{d\mathbf{u}}{dP} = \text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{u} - \text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{u}, \quad (\textit{O. v.}, \text{pag. } 59, [15])$$

(15) $\operatorname{grad} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{dP}\mathbf{u} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u}$,

(16) $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{u}) = I_1\left(\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) + (\operatorname{grad} K\alpha) \times \mathbf{u}$, (*O. v.*, pag. 57, [10]).

Dim. (9). — Assumendo lo spostamento dP parallelo al vettore $\mathbf{a}$, che, evidentemente, è lecito supporre unitario, si ha: $dP = (\mathbf{a} \times dP)\,\mathbf{a}$, onde dalle (1′), (7):

$$(\mathbf{a} \times dP)(\operatorname{grad}\alpha) \times \mathbf{a} = \operatorname{div}[(\mathbf{a} \times dP)\, K\alpha\mathbf{a}]$$
$$= (\mathbf{a} \times dP) \operatorname{div}(K\alpha\mathbf{a}) + [\operatorname{grad}(\mathbf{a} \times dP)] \times K\alpha\mathbf{a},$$

e poichè dalla (4′) ri riconosce subito che $\operatorname{grad}(\mathbf{a} \times dP) = 0$, si ha la (9).

Dim. (10). — Poichè:

$$\operatorname{grad}\alpha = (\mathbf{i} \times \operatorname{grad}\alpha)\,\mathbf{i} + (\mathbf{j} \times \operatorname{grad}\alpha)\,\mathbf{j} + (\mathbf{k} \times \operatorname{grad}\alpha)\,\mathbf{k},$$

dalla (9) segue senz'altro la (10).

Dim. (11). — Dalle (1′), (7) si deduce:

$$[\operatorname{grad}(m\alpha)] \times dP = \operatorname{div}(mK\alpha dP) = m \operatorname{div}(K\alpha dP) + (\operatorname{grad} m) \times K\alpha dP$$
$$= m(\operatorname{grad}\alpha) \times dP + \alpha(\operatorname{grad} m) \times dP,$$

perciò se ne trae la (11).

Dim. (12). — Dalle (1′), (8) risulta:

$$[\operatorname{grad}(\mathbf{u}\wedge)] \times dP = -\operatorname{div}(\mathbf{u} \wedge dP) = -(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \times dP + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} dP,$$

ma si vede subito che: $\operatorname{rot} dP = 0$, onde si ottiene la (12).

Dim. (13). — Dalle (1′), (4′) si ha:

$$\left[\operatorname{grad}\left(K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\right] \times dP = \operatorname{div}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}dP\right) = d(\operatorname{div}\mathbf{u}) = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}) \times dP,$$

la quale dimostra la (13).

Dim. (14). — Si ha anzitutto (*O. v.*, pag. 56, [3]):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} = K\frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\operatorname{rot}\mathbf{u})\wedge,$$

perciò prendendo il gradiente di ambi i membri, e ricordando le (2), (12), (13) si ha la (14).

Dim. (15). — Dalle proprietà dell'omografia H (*O. v.* pag. 20, [1], [2]) si trae:

$$[\operatorname{grad} H(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \times dP = \operatorname{div}[KH(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \times dP] = \operatorname{div}[(\mathbf{v} \times dP)\,\mathbf{u}]$$
$$= [\operatorname{grad}(\mathbf{v} \times dP)] \times \mathbf{u} + (\mathbf{v} \times dP) \operatorname{div}\mathbf{u},$$

e poichè il primo termine dell'ultimo membro può scriversi (*O. v.*, pag. 51, [5]):

$$\left(\mathrm{K}\,\frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\,d\mathrm{P}\right)\times\mathbf{u}\,,\quad\text{cioè}\quad\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u}\right)\times d\mathrm{P}\,,$$

si conclude la (15).

Dim. (16). — Dalla (5) e dalle formule [7], [9′], pag. 47 di *O. v.*, si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\alpha\mathbf{u}) &= \mathbf{i}\times\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\times\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\times\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i}\times\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{i}+\mathbf{j}\times\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{j}+\mathbf{k}\times\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{k}+\mathbf{i}\times\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{u}+\cdots\\ &= \mathrm{I}_1\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)+\mathbf{u}\times\left[\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{j}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{k}\right)\mathbf{k}\right],\end{aligned}$$

la quale, in virtù della (3), non differisce dalla (16).

Un'altra proprietà, che è spesso molto utile, è la seguente. Se $u, v, \ldots$ sono numeri funzioni di P, ed $\alpha(u, v, \ldots)$ è un'omografia funzione di $u, v, \ldots$ (e quindi di P), si ha:

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{P}}\alpha=\frac{\partial\alpha}{\partial u}\operatorname{grad}_{\mathrm{P}}u+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\operatorname{grad}_{\mathrm{P}}v+\cdots \tag{17}$$

Infatti, dalla (3) si deduce:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\alpha &= \left[\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left(\frac{du}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\frac{dv}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i}\right)+\cdots\right]\mathbf{i}+\\ &\qquad+\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left(\frac{du}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{j}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\frac{dv}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{j}\right)+\cdots\right]\mathbf{j}+\cdots\\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}\left[\left(\frac{du}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{du}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{j}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{du}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{k}\right)\mathbf{k}\right]+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left[\;\cdots\;\right]+\cdots\end{aligned}$$

e per la (3) stessa, segue la (17).

3. Esponiamo ora una dimostrazione semplicissima di una notevole identità che lega le potenze di un'omografia e i suoi invarianti (*O. v.*, pag. 10, [1]).

Conviene anzitutto premettere una formula assai utile. Se α è un'omografia vettoriale, ed $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sono vettori qualunque si ha:

$$(\alpha\mathbf{x})\wedge(\alpha\mathbf{y})=(\mathrm{I}_2\alpha)\,\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}-\mathrm{K}\alpha(\mathbf{x}\wedge\alpha\mathbf{y}-\mathbf{y}\wedge\alpha\mathbf{x})\,. \tag{18}$$

Infatti, se $\mathbf{z}$ è un vettore qualunque, non complanare con $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, si ha dall'espressione dell'invariante secondo di un'omografia (*O. v.*, pag. 7, [3]):

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_2\alpha)\,(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\times\mathbf{z} &= (\mathbf{x}\wedge\alpha\mathbf{y})\times\alpha\mathbf{z}-(\mathbf{y}\wedge\alpha\mathbf{x})\times\alpha\mathbf{z}+(\alpha\mathbf{x}\wedge\alpha\mathbf{y})\times\mathbf{z}\\ &= \mathrm{K}\alpha(\mathbf{x}\wedge\alpha\mathbf{y})\times\mathbf{z}-\mathrm{K}\alpha(\mathbf{y}\wedge\alpha\mathbf{x})\times\mathbf{z}+(\alpha\mathbf{x}\wedge\alpha\mathbf{y})\times\mathbf{z}\,,\end{aligned}$$

la quale, essendo vera qualunque sia $\mathbf{z}$, dimostra la (18).

Si può trasformare la (18) applicando la formula:

$$K\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (I_1\alpha)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - (\mathbf{x} \wedge \alpha\mathbf{y} - \mathbf{y} \wedge \alpha\mathbf{x}) \quad (19)$$ [1],

e si ha così:

$$(\alpha\mathbf{x}) \wedge (\alpha\mathbf{y}) = (I_2\alpha)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - K\alpha\left[(I_1\alpha)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - K\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\right],$$

perciò se si pone:

$$R\alpha = I_2\alpha - K\alpha(I_1\alpha - K\alpha), \quad (20)$$

l'omografia $R\alpha$ è evidentemente funzione della sola α, e risulta:

$$(\alpha\mathbf{x}) \wedge (\alpha\mathbf{y}) = R\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}). \quad (21)$$

In *O. v.*, pag. 24, [1], è assunta la (21) come definizione di $R\alpha$, e la (20) vi è stabilita in modo del tutto diverso.

Ciò posto, consideriamo la formula (*O. v.*, pag. 18, [8]):

$$K\alpha\,\{(\alpha\mathbf{x}) \wedge (\alpha\mathbf{y})\} = (I_3\alpha)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$$ [2];

essa può scriversi, applicando la (21):

$$(K\alpha)\, R\alpha = I_3\alpha,$$

perciò sostituendo ad $R\alpha$ il valore (20) risulta:

$$(K\alpha)^3 - (I_1\alpha)(K\alpha)^2 + (I_2\alpha)\, K\alpha - I_3\alpha = 0. \quad (22)$$

È questa l'identità che volevamo dimostrare. Ponendo $K\alpha$ al posto di α si ha ancora:

$$\alpha^3 - (I_1 K\alpha)\, \alpha^2 + (I_2 K\alpha)\, \alpha - I_3 K\alpha = 0. \quad (22')$$

Dedurremo ora due proprietà dalla (22); una prima è questa che le omografie α e $K\alpha$ hanno gli stessi invarianti, cioè (*O. v.*, pag. 17, [5]):

$$I_r(K\alpha) = I_r\alpha, \qquad (r = 1, 2, 3). \quad (23)$$

[1] Questa formula si può ottenere da quella di *O. v.*, pag. 18, [7], ponendovi $K\alpha$ al posto di α; però siccome la dimostrazione, che di quest'ultima formula è data in *O. v.*, è piuttosto complicata, è utile far vedere che la (19) può ad es. dedursi subito dalla formula (*O. v.*, pag. 19, [11]):

$$2V(\mathbf{x} \wedge \alpha) = (I_1\alpha - \alpha)\, \mathbf{x} \quad (a)$$

la cui dimostrazione è semplicissima. Infatti si ha intanto:

$$K(\mathbf{x} \wedge \alpha) = \mathbf{x} \wedge \alpha - 2V(\mathbf{x} \wedge \alpha) \wedge,$$

perciò ricordando la (a), si ha, se $\mathbf{y}$ è un vettore qualunque:

$$K(\mathbf{x} \wedge \alpha)\, \mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \alpha\mathbf{y} - (I_1\alpha)\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + (\alpha\mathbf{x}) \wedge \mathbf{y},$$

e poichè il primo membro può scriversi (*O. v.*, pag. 18, [9]): $-K\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$, la formula precedente non differisce dalla (19).

[2] Il prof. Marcolongo mi ha scritto, giorni sono, di aver dimostrato in modo semplicissimo questa formula, come pure la [7], pag. 18 di *O. v.*, deducendola direttamente dalle [3], pag. 7 di *O. v.*

Infatti, operando col simbolo K sulla (22') si ha:

$$\text{(24)} \qquad K\alpha^3 - (I_1 K\alpha)\, K\alpha^2 + (I_2 K\alpha)\, K\alpha - I_3 K\alpha = 0\,,$$

ma siccome (*O. v.*, pag. 18, [9]): $K\alpha^r = (K\alpha)^r$, confrontando le (24), (22) si deducono le (23). La (22') può perciò anche scriversi:

$$\text{(22'')} \qquad \alpha^3 - (I_1\alpha)\,\alpha^2 + (I_2\alpha)\,\alpha - I_3\alpha = 0\,.$$

Le (23) sono stabilite in modo del tutto diverso in *O. v.*

La seconda proprietà è la seguente. Se β è un'altra omografia vettoriale, le omografie $\alpha\beta$ e $\beta\alpha$ hanno gli stessi invarianti, cioè:

$$\text{(25)} \qquad I_r(\alpha\beta) = I_r(\beta\alpha)\,, \qquad (r = 1\,, 2\,, 3).$$

Infatti, ponendo nella (22'') al posto di α, prima $\alpha\beta$ e poi $\beta\alpha$, si ha:

$$\text{(26)} \qquad \alpha\beta\,\alpha\beta\,\alpha\beta - [I_1(\alpha\beta)]\,\alpha\beta\,\alpha\beta + [I_2(\alpha\beta)]\,\alpha\beta - I_3(\alpha\beta) = 0\,,$$

$$\text{(27)} \qquad \beta\alpha\,\beta\alpha\,\beta\alpha - [I_1(\beta\alpha)]\,\beta\alpha\,\beta\alpha + [I_2(\beta\alpha)]\,\beta\alpha - I_3(\beta\alpha) = 0\,;$$

operando a destra con α sulla (26), e a sinistra pure con α sulla (27), risulta:

$$\alpha\beta\,\alpha\beta\,\alpha\beta\alpha - [I_1(\alpha\beta)]\,\alpha\beta\,\alpha\beta\alpha + [I_2(\alpha\beta)]\,\alpha\beta\alpha - [I_3(\alpha\beta)]\,\alpha = 0\,,$$

$$\alpha\beta\,\alpha\beta\,\alpha\beta\alpha - [I_1(\beta\alpha)]\,\alpha\beta\,\alpha\beta\alpha + [I_2(\beta\alpha)]\,\alpha\beta\alpha - [I_3(\beta\alpha)]\,\alpha = 0\,;$$

il confronto di queste due identità fornisce le (25). In *O. v.* le (25) sono state ottenute, in modo del tutto diverso, solo per $r = 1$ (pag. 20, [16]) e per $r = 3$ (pag. 8, [8]). Per $r = 2$ la formula potrebbe pure dedursi dalle [6], [12] di pag. 25.

Osservazione. — Due altre proprietà assai utili sono le seguenti. Se $u, v, \ldots.$ sono numeri funzioni di P, ed $\mathbf{x}\,(u, v, \ldots)$ è un vettore funzione di $u, v, \ldots.$ (e quindi di P), si hanno le formule seguenti, facili da dimostrarsi:

$$\operatorname{div}\mathbf{x} = (\operatorname{grad} u) \times \frac{d\mathbf{x}}{du} + (\operatorname{grad} v) \times \frac{d\mathbf{x}}{dv} + \ldots.$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{x} = (\operatorname{grad} u) \wedge \frac{d\mathbf{x}}{du} + (\operatorname{grad} v) \wedge \frac{d\mathbf{x}}{dv} + \ldots.$$

Per mezzo della prima di queste formule, si può semplificare la dimostrazione della (17).