ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sull'equazione alle semisomme e sul teorema di Hurwitz.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

In due lavori, recentemente inseriti nei Rendiconti di questa illustre Accademia, ho detto ciò che intendo per problema di Hurwitz; ed ho, nel primo lavoro, ricondotta la risoluzione del problema alla costruzione della *equazione alle semisomme* relativa all'equazione data, e, nel secondo, alla costruzione di uno speciale determinante. I due metodi sostanzialmente coincidono.

Qui voglio esporre alcune osservazioni, le quali dimostrano la coincidenza dei due metodi; poi voglio dimostrare, per via algebrica, con mezzi molto più elementari di quelli adoperati dall'illustre Autore, il teorema che Hurwitz stabilisce per risolvere l'importante problema. Resteranno ancora da ricercarsi le relazioni fra il metodo di Hurwitz e quello che fa capo all'equazione alle semisomme, ma intanto non sarà male fermarsi ai concetti finora stabiliti.

1. Siano $-r_1, -r_2, \dots, -r_n$ le n radici dell'equazione di grado n

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dove, per semplicità (non restrittiva), vogliamo considerare $a_0 = 1$. Possiamo dunque scrivere

$$f(x) = (x + r_1)(x + r_2) \dots (x + r_n).$$

Consideriamo il determinante d'ordine $n - 1$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & . & . & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Il procedimento d'induzione lascia dimostrare, come vediamo subito, la formula

$$(1) \qquad D_{n-1} = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3) \dots (r_1 + r_n) \dots \dots (r_{n-1} + r_n),$$

dove s'intendono combinate a due a due, in tutti gli $\binom{n}{2}$ modi, le n grandezze $r_1, r_2, \dots, r_n$.

Osserviamo intanto che la (1) è senz'altro valida per i polinomî di grado 2; poi ammettiamola fino al grado n, e vedremo che resterà valida per il successivo grado $n+1$.

Costruiamo il determinante, d'ordine n, analogo a D_{n-1}, per il polinomio di grado $n+1$

$$R(x) = f(x)\,(x+r).$$

Otteniamo

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_0 r & a_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 + a_2 r & a_2 + a_1 r & a_1 + a_0 r & . & . & . & 0 \\ a_5 + a_4 r & a_4 + a_3 r & a_3 + a_2 r & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n + a_{n-1} r \end{vmatrix}.$$

Innalzando di un'unità l'ordine di questo determinante, lo possiamo mettere nella forma

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & . & . & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n & a_{n-1} \\ \pm r^n & \mp r^{n-1} & \pm r^{n-2} & . & . & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Basta ora moltiplicare la prima colonna per $\pm a_0$, la seconda per $\mp a_1, \ldots$, e poi sommare coll'ultima moltiplicata per a_n, per vedere che esso vale $\frac{1}{a_n} f(r)\, a_n D_{n-1}$, cioè $f(r)\, D_{n-1}$. Ma $f(r)$ vale $(r+r_1)(r+r_2)\ldots(r+r_n)$, dunque fornisce ciò che manca al prodotto (1) perchè contenga tutte le $\binom{n+1}{2}$ somme binarie formate combinando le $n+1$ grandezze $r_1, r_2, \ldots, r_n, r$. Ciò dimostra, secondo il criterio d'induzione, la generale validità della (1).

Ora consideriamo il polinomio $P(x) = f(x+y)$, e coi coefficienti di $P(x)$, i quali sono funzioni di y, costruiamo il determinante d'ordine $n-1$, analogo a D_{n-1}, che chiameremo $F(y)$. In forza del teorema espresso dalla formula (1), potremo scrivere

$$F(y) = (r_1 + r_2 + 2y)\ldots(r_1 + r_n + 2y)\ldots(r_{n-1} + r_n + 2y),$$

perchè le radici di $P(x) = 0$ saranno evidentemente $-r_1 - y, -r_2 - y, \ldots, -r_n - y$.

Dopo ciò, risulta senz'altro che l'equazione $F(y)=0$ è l'equazione alle semisomme relativa all'equazione $f(x)=0$. Moltiplicando $F(y)$ per $f(y)$ si ritrova l'equazione stabilita nel precedente lavoro: anch'essa è l'equazione alle semisomme, ma con elementi ripetuti, cioè, fra le altre semisomme, vi figurano $\frac{r_1+r_1}{2}=r_1$, ecc.

2. Ed ora noi vogliamo dimostrare algebricamente il teorema di Hurwitz. Chiamando con D_ν il minore formato colle prime ν linee e colle prime ν colonne di D_{n-1}, e considerando anche $D_n=a_n D_{n-1}$, scriviamo la catena

$$a_0\,, D_1\,, D_2\,, \ldots, D_{n-1}\,, D_n\,. \tag{2}$$

Supponiamo ancora $a_0=1$, e supponiamo reali gli altri coefficienti di $f(x)$. Il teorema di Hurtwitz si enuncia allora in questo modo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè $f(x)=0$ *abbia negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che gli elementi della catena* (2) *siano positivi.*

Sarà opportuno fare alcune premesse.

Consideriamo, per esempio, il determinante

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2\\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4\\ -r^5 & r^4 & -r^3 & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Moltiplichiamo rispettivamente le ultime quattro colonne per gli aggiunti degli elementi dell'ultima linea del determinante

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2\\ -r^3 & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Così l'ultima colonna di Δ_5 avrà tutti zeri, tranne i due ultimi elementi, che saranno D_4 e Δ_3. Ma Δ_5 sarà stato moltiplicato per D_3, dunque, sviluppando, otteniamo $D_3\Delta_5=\Delta_3 D_5+rD_4\Delta_4$. In modo perfettamente analogo, che a scanso d'ingombro non descriviamo ulteriormente, otteniamo la formula generale

$$D_{\nu-1}\Delta_{\nu+1}=\Delta_{\nu-1}D_{\nu+1}+rD_\nu\Delta_\nu\,, \tag{3}$$

valida a partire da $\nu=2$ fino a $\nu=n-1$.

Sia ora r un parametro reale positivo; allora basterà ammettere che $f(x) = 0$ abbia negative le radici reali e le parti reali delle radici, e che verifichi il teorema di Hurwitz, poi ammettere che $\Delta_{\nu=1}$ e Δ_ν siano positivi, perchè ne risulti positivo anche $\Delta_{\nu+1}$.

Se poi r è complesso $= \alpha + i\beta$, con α positivo, allora consideriamo anche il coniugato $r' = \alpha - i\beta$, e sia $(x-r)(x-r') = x^2 + kx + l$. Il determinante Θ_ν (analogo a D_ν e a Δ_ν), formato cui coefficienti di

$$S(x) = f(x)(x^2 + kx + l),$$

ha gli elementi reali, sebbene Δ_ν non li abbia. Per esempio sarà

$$\Theta_3 = \begin{vmatrix} a_1 + ka_0 & a_0 & 0 \\ a_3 + ka_2 + la_1 & a_2 + ka_1 + la_0 & a_1 + ka_0 \\ a_5 + ka_4 + la_3 & a_4 + ka_3 + la_2 & a_3 + ka_2 + la_1 \end{vmatrix}.$$

Come la (3), si stabilisce anche la formula

$$\Delta_{\nu-1}\Theta_{\nu+1} = \Theta_{\nu-1}\Delta_{\nu+1} + r'\Delta_\nu\Theta_\nu. \tag{4}$$

Queste due formule (3) e (4) mostrano che basta, oltre le precedenti ipotesi, ammettere positive le parti reali di $\Delta_{\nu-1}$, Δ_ν, perchè risulti positiva la grandezza reale $\Theta_{\nu+1}$.

Dopo ciò, aggiungendo ovvie osservazioni, noi possiamo, senza molto indugiarci, asserire che il criterio d'induzione lascia agevolmente stabilire la prima parte del teorema di Hurwitz: se un polinomio a coefficienti reali ha negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse, allora gli elementi (2) relativi a questo polinomio debbono essere positivi.

Dobbiamo ancora dimostrare che tale condizione è anche sufficiente. Intanto osserviamo che $f(x)$, $f(x)(x^2 + \omega_1)$, $f(x^4 + \omega_1 x^2 + \omega_2)$ hanno gli stessi D_ν.

Supponiamo, dopo ciò, positivi gli elementi (2), e sia (per assurdo) $r = \alpha$, ovvero $r = \alpha + i\beta$, con α non negativo, una radice di $f(x)$. Intanto $f(x)$ deve avere qualche altra radice reale non negativa, o qualche altra coppia di radici coniugate con parte reale non negativa: ciò risulta senza altro dal segno positivo di a_n, e dalla (1), dove D_{n-1} è positivo.

Ma allora il polinomio $\dfrac{f(x)}{x-\alpha}$ o il polinomio $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, di gradi inferiori ad n, dovrebbero avere i D positivi, e qualche radice reale non negativa o qualche radice complessa con parte reale non negativa; ciò starebbe contro (per gradi $< n$) al teorema di Hurwitz; ma tale teorema è valido per i polinomî di secondo grado, dunque il criterio d'induzione lascia subito stabilire anche questa seconda parte.