ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Meccanica. — *Sul potenziale newtoniano di una circonferenza omogenea*. Nota di G. PAVANINI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

L'attrazione newtoniana dovuta ad una circonferenza materiale fu già studiata da diversi autori. Il potenziale relativo venne espresso da questi o mediante serie infinite d'armoniche sferiche, o coll'uso di integrali ellittici di Jacobi.

Mi propongo nella presente Nota di assegnare l'espressione dello stesso potenziale mediante le funzioni di Weierstrass.

Già il prof. H. Nagaoka ha trattato l'analoga questione per il potenziale di una corrente elettrica circolare arrivando al risultato per via indiretta [1].

Io ho preferito il calcolo diretto, che pur riesce assai semplice, e sono giunto ad una formula finale che mi sembra espressiva, e tale da mostrare una volta di più la convenienza dell'uso sistematico delle notazioni di Weierstrass.

Ricavo in particolare il comportamento assintotico del potenziale e delle componenti dell'attrazione quando il punto potenziato si avvicina indefinitamente alla circonferenza potenziante. Ritrovo, per questo caso, le espressioni date in generale dal prof. T. Levi-Civita per l'attrazione newtoniana di una linea in punti prossimi alla linea stessa [2].

1. Sia a il raggio di una circonferenza materiale C omogenea e di massa totale eguale ad uno; ds un generico elemento di C, ed r la distanza di un punto potenziato P dall'elemento potenziante ds.

Il potenziale newtoniano è allora

$$V = \frac{1}{2\pi a} \int_C \frac{ds}{r} \,.$$

Assumiamo un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali coll'origine nel centro O della circonferenza, e l'asse z perpendicolare al piano della medesima. Poniamo (P_1 essendo la proiezione di P sul piano $z = 0$) $\overline{OP_1} = \varrho$, ed indichiamo con φ l'angolo formato dal raggio della circonferenza passante per l'elemento potenziante con $\overline{OP_0}$. Avremo:

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 + z^2 - z^2 a\varrho \cos\varphi \,,$$

(1) *Note on the Potential and the Lines of Force of a Circular Current*. Journal of the College of Science of Tōkyō; vol. XVI, art. 15.

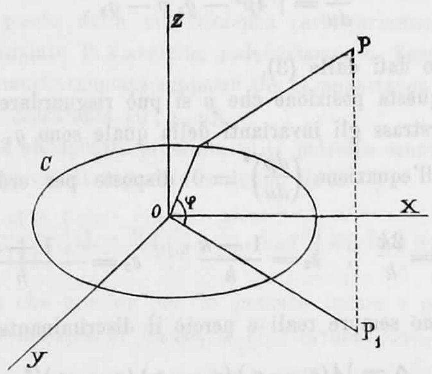
(2) *Sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVII, 2° sem. 1908.

nonchè

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2+\varrho^2+z^2-2a\varrho\cos\varphi}},$$

od anche, come si può facilmente vedere (scindendo in quattro quadranti l'intervallo d'integrazione, e cambiando nel III e nel IV la designazione della variabile)

$$(1) \qquad V = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2+\varrho^2+z^2-2a\varrho\cos\varphi}}$$



2. Per introdurre le trascendenti ellittiche conviene in primo luogo sostituire a φ una nuova variabile p legata ad essa dalla relazione [1]

$$\cos\varphi = hp + k,$$

dove h e k dipendono dal punto P (e dalle dimensioni della circonferenza) a norma delle formule

$$(2) \qquad h^3 = \frac{2}{a\varrho}, \quad k = \frac{a^2+\varrho^2+z^2}{6a\varrho}.$$

Ciò posto, avremo:

$$\operatorname{sen}\varphi\sqrt{a^2+\varrho^2+z^2-2a\varrho\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{\{1-(hp+k)^2\}\{(a^2+\varrho^2+z^2)-2a\varrho(hp+k)\}}$$

$$= \sqrt{4p^3 - \frac{4}{h^2}(1+3k^2)\,p - \frac{8k}{h^3}(k^2-1)},$$

od anche, ponendo ancora

$$(3) \qquad g_2 = \frac{4}{h^2}(1+3k^3) \quad \text{e} \quad g_3 = \frac{8k}{h^3}(k^2-1),$$

$$\operatorname{sen}\varphi\sqrt{a^2+\varrho^2+z^2-2a\varrho\cos\varphi} = \sqrt{4p^3-g_2\,p-g_3}.$$

[1] Cfr. H. Nagaoka, l. c.

La (1) diviene quindi

$$(4)\qquad V = -\frac{h}{\pi}\int_{\frac{1-k}{h}}^{-\frac{1+k}{h}} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

La forma stessa della quantità sotto il segno suggerisce l'adozione di una nuova variabile ausiliaria u definita dall'equazione differenziale

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3},$$

dove g_2 e g_3 sono dati dalle (3).

Risulta da questa posizione che p si può risguardare come la funzione ellittica di Weierstrass gli invarianti della quale sono g_2 e g_3.

Le radici dell'equazione $\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 0$ disposte per ordine di grandezza sono:

$$e_1 = \frac{2k}{h}\ ,\quad e_2 = \frac{1-k}{h}\ ,\quad e_3 = -\frac{1+k}{h}.$$

Esse si mantengono sempre reali e perciò il discriminante

$$\Delta = \{4(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\}^2$$
$$= \frac{64}{h^6}(9k^2 - 1)^2$$

è sempre positivo, e non si annulla che per $k = \frac{1}{3}$, cioè, a norma delle (2), quando il punto potenziato trovasi sulla circonferenza, caso che per ora escluderemo.

In queste condizioni i due periodi di p sono l'uno reale e l'altro puramente immaginario, determinati notoriamente dalle formule

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}\ ,\quad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Dacchè, per $p = -\frac{1+k}{h} = e_3$, $u = \omega'$, e per $p = \frac{1-k}{h} = e_2$, $u = \omega + \omega'$, abbiamo dalla (4)

$$V = -\frac{h}{\pi}\int_{\omega+\omega'}^{\omega'} du$$

e quindi

$$(5)\qquad V = \frac{h}{\pi}\,\omega,$$

espressione quanto mai semplice e notevole del nostro potenziale.

3. Passiamo a considerare il caso particolare nel quale il punto potenziato s'avvicina indefinitamente alla circonferenza. Il determinante Δ converge allora verso zero, e_1 tende a confondersi con e_2, e la p a degenerare in funzione iperbolica. Conseguentemente ω tende a divenire infinito e con esso pure infinito diviene V. Ciò s'accorda con risultati ben noti [1].

In modo più preciso mi propongo di determinare per questo caso limite una espressione assintotica di V, che metta in evidenza in qual modo divengono infinite così questa funzione come le sue derivate (componenti dell'attrazione).

4. Sia O′ il punto della circonferenza (arbitrariamente prescelto) al quale il punto potenziato P s'avvicina indefinitamente. Senza ledere la generalità possiamo manifestamente supporre che O′ appartenga all'asse delle y ed abbia quindi le coordinate $(0, a, 0)$.

Supposto P già abbastanza prossimo ad O′ potremo senz'altro ritenere g_3 negativo, e valido perciò il seguente sviluppo di ω [2]:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt[4]{12 g_2}} \left\{ Q - F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \tau^2\right) \log 24\sqrt{3}\,\tau \right\},$$

dove Q è una serie che procede per le potenze intere e positive di τ^2, F la nota serie ipergeometrica di Gauss, e τ^2 l'inverso dell'invariante assoluto J, cioè

$$\tau^2 = \frac{\Delta}{g_2^3} = \frac{(9k^2 - 1)^2}{(3k + 1)^3}; \tag{6}$$

Q ed F essendo assolutamente ed uniformemente convergenti per $|\tau| < 1$.

Ciò premesso, ove si ponga (tenendo presente l'espressione di g_2 data dalle (3))

$$V_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}} \left\{ Q - F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \tau^2\right) \log 24\sqrt{3} \right\},$$

$$V_2 = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^3)}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \tau^2\right) \log \tau,$$

la (6) può essere scritta

$$V = V_1 + V_2.$$

5. Per riconoscere il comportamento delle funzioni V_1 e V_2 conviene anzitutto esplicitare la dipendenza di h, k e τ dagli elementi geometrici della questione (posizione di P rispetto alla circonferenza).

A questo scopo assumeremo un nuovo sistema di assi coordinati $O'x'y'z'$ legato al precedente dalle formule di trasformazione

$$x = x' \quad , \quad y = y' - a \quad , \quad z = z',$$

[1] Cfr. per es. Betti, *Teoria delle forze newtoniane*, pag. 20.
[2] Cfr G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, tom. I, pag. 345.

con che è lecito ritenere x', y', z' comunque piccoli, purchè soltanto si supponga P già abbastanza prossimo ad O'. Indichiamo poi con s la distanza $\overline{PO'}$; sarà

$$s^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Avremo così (rammentando che $\varrho^2 = x^2 + y^2$)

$$\varrho^2 = a^2\left(1 - \frac{2y'}{a} + \frac{x'^2 + y'^2}{a^2}\right),$$

dove (sempre per P abbastanza vicino ad O') si può ritenere

$$\left|- \frac{2y'}{a} + \frac{x'^2 + y'^2}{a^2}\right|$$

comunque piccolo, in particolare minore di 1. Con ciò lo sviluppo binomiale ci dà:

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{y'}{a} + \eta\right), \text{ e } \varrho^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 + \frac{y'}{2a} + \eta_1\right),$$

rappresentando con η ed η_1 termini di secondo ordine almeno in x', y', z'.

Consideriamo ora l'espressione $\dfrac{\sqrt{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}}$ che si presenta tanto in V_1 quanto in V_2.

Per la prima delle (2) e per la seconda delle (7) abbiamo intanto

$$(8) \qquad \sqrt{h^3} = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\varrho^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{a}\left(1 + \frac{y'}{2a} + \eta_1\right).$$

Sostituendo poi nella seconda delle (2) le nuove variabili, ed avendo riguardo alla prima delle (7), otteniamo

$$k = \frac{1}{3}(1 + \eta_2),$$

e quindi

$$(8') \qquad (1 + 3k^2)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\,(1 + \eta_3),$$

nelle quali η_2 ed η_3 hanno significato e comportamento analogo alle precedenti η. Dalle (8) ed (8') ricaviamo dunque:

$$(9) \qquad \frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{y'}{2a} + \mathrm{H}\right),$$

dove il termine addizionale H è anch'esso d'ordine non inferiore al secondo.

Diamo forma conveniente al nostro scopo anche alla funzione $9k^2-1$ che apparisce nella espressione (6) di τ. Per la seconda delle (2) abbiamo

$$9k^2-1=\frac{1}{4a^2\varrho^2}\{(a^2+\varrho^2+z^2)-4a^2\varrho^2\},$$

e, introducendo le nuove variabili,

$$9k^2-1=\frac{1}{4a^2\varrho^2}\{4a^2\varepsilon^2-4a^2x'^2-4a^2y'\varepsilon^2+\varepsilon^4\},$$

od anche

(10) $$9k^2-1=\mathrm{A}(\varepsilon^2-x'^2),$$

essendo

(10') $$\mathrm{A}=\frac{1}{\varrho^2}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x'^2}\left(\frac{y'}{a}-\frac{\varepsilon^2}{4a^2}\right)\right\}.$$

6. Siamo ora in grado di vedere come si comportano nel caso limite le quantità V_1 e V_2 e le loro derivate.

Tanto la Q quanto la F che appariscono in V_1 sono funzioni olomorfe di τ per $|\tau|<1$, e quindi anche allora che il punto potenziato si avvicina indefinitamente alla circonferenza (cioè quando k tende verso $\frac{1}{3}$ e perciò τ verso 0).

Di più con Q ed F si mantengono finite anche le loro derivate rispetto ad x', y', z'. Basta osservare infatti che i termini di queste funzioni, a meno d'un coefficiente numerico, sono del tipo τ^{2m}, e che perciò le loro derivate si presentano sotto la forma $2m\,\tau^{m-1}\frac{\partial\tau}{\partial t}$ (dove t indica una qualunque delle variabili x', y', z') ed infine aver presente che $\frac{\partial\tau}{\partial t}$ ha per limite lo 0, come facilmente si può verificare in base alle (6) ed (11).

Il coefficiente $\frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}}$ che compare tanto in V_1 quanto in V_2 si mantiene finito assieme alle sue derivate, come risulta dalla (9).

Così intanto si può concludere che V_1 si mantiene finita assieme alle sue derivate.

Passiamo a V_2. In questa la serie F è moltiplicata per $\log\tau$: avremo quindi da considerare dei termini del tipo $\tau^{2m}\log\tau$, fatta astrazione da un coefficiente che, a norma delle (9), si mantiene finito assieme alle sue derivate. Per $m=1, 2, 3\ldots$

$$\lim_{\tau=0}\tau^{2m}\log\tau=0,$$

e, per gli stessi valori di m, le derivate di $\tau^{2m}\log\tau$, essendo della forma

$$(2m\,\tau^{2m-1}\log\tau+\tau^{2m-1})\,\frac{\partial\tau}{\partial t}\,,$$

hanno pure per limite lo 0.

Indichiamo con V_2'' l'insieme dei termini di V_2 che corrispondono ad $m=1,2,3\ldots$ e che, come s'è visto ora, si mantengono finiti assieme alle loro derivate. Potremo scrivere pertanto

$$V_2=V_2'+V_2'',$$

essendo

$$V_2'=-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}}\log\tau\,.$$

Dalla (6) abbiamo:

$$\log\tau=\log(9k^2-1)-\frac{3}{2}\log(3k+1).$$

Osserviamo che $\log(3k+1)$ si mantiene sempre finito e con esso anche le sue derivate.

Per la (10) poi

$$\log(9k^2-1)=\log(\varepsilon^2-x'^2)+\log A:$$

qui pure possiamo affermare che $\log A$ si conserva sempre finito assieme alle sue derivate. Ciò risulta immediatamente dalle (10′), semprechè si escluda, com'è nella natura del problema, che il punto potenziato s'avvicini alla circonferenza nella direzione tangenziale; o, più precisamente, si ritenga diverso dall'unità il limite inferiore del rapporto $\frac{x}{\varepsilon}$ al convergere di ε verso 0 [1].

Per la (9) inoltre

$$\frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt{3(1+3k^2)^3}}\log(\varepsilon^2-x'^2)=\frac{1}{a}\left(1+\frac{y'}{2a}\right)\log(\varepsilon^2-x'^2)+\frac{1}{a}\,H\log(\varepsilon^2-x'^2)$$

e per essere H di secondo ordine nelle x',y',z' ne discende che tanto $H\log(\varepsilon^2-x'^2)$ quanto le sue derivate tendono al limite 0.

Da tutto questo si raccoglie che la cercata espressione assintotica $V^{(a)}$ di V atta alla derivazione è

$$V^{(a)}=-\frac{1}{2\pi a}\left(1+\frac{y'}{2a}\right)\log(\varepsilon^2-x'^2). \tag{11}$$

(1) Tenuta presente tale circostanza, si può accertare materialmente sulla espressione di A e delle sue derivate che tutto resta finito.

Ad essa si può, volendo, sostituire

$$(11') \qquad \mathrm{V}^{(a)} = \frac{1}{2\pi a} \log(\varepsilon^2 - x'^2) - \frac{y'}{2\pi a^2} \log \varepsilon$$

perchè la differenza

$$-\frac{y'}{2\pi a^2} \log\left(\frac{\varepsilon^2 - x'^2}{\varepsilon^2}\right)$$

si mantiene finita assieme alle sue derivate.

L'espressione (11) ha la forma attribuitale dal prof. T. Levi-Civita nel caso generale di una linea materiale qualunque [1].

Meteorologia. — *Le isanomale termiche in Italia e loro relazione con la distribuzione della pressione barometrica e con la circolazione aerea nei bassi strati dell'atmosfera.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. Come è noto varî studiosi hanno determinato le temperature normali che spettano ai singoli paralleli dell'emisfero Nord e dell'emisfero Sud fornendo in tal modo dati interessanti poichè da essi si possono desumere elementi per spiegare in quale proporzione le cause di riscaldamento e di raffreddamento, quali per esempio le correnti marine, contribuiscono nelle differenze che si hanno fra le temperature dei varî paralleli.

Se si paragona la temperatura media quale risulta dalle osservazioni meteorologiche eseguite in una data località con la temperatura che spetta alla latitudine della stazione, non si osserva concordanza, e la differenza costituisce l'anomalia termica di quella località. Se si determina l'anomalia termica per i diversi luoghi di una regione, riunendo i punti di uguale anomalia, si ottengono le isanomale termiche, e tenendo presente l'orografia della regione si possono esaminare le cause che producono le anomalie.

Diversi studiosi si sono occupati della determinazione delle isanomale.

L. Teisserenc de Bort [2] esaminò le isanomale per tutto il globo e per la determinazione di tali curve in Italia, considerò le temperature di 29 città italiane aventi però alcune 13 anni di osservazioni, altre 2 anni e una un anno soltanto.

E. Sella [3] esaminò la distribuzione delle isanomale utilizzando le formule di Spitaler per le temperature dei paralleli e le isoterme pubblicate

[1] Cfr. loc. cit., pag. 13.

[2] Teisserenc de Bort, *Étude sur la distribution rélative, à la surface du globe, des températures et des pressions moyennes pendant les mois de janvier et de juillet.* Annales du Bureau Central Météorologique de France, année 1878, p. IV.

[3] E. Sella, *Ueber holosphärische Isanomalen der Temperatur.* Meteorologische Zeitschrift, Band XXXI (1896), S. 161-166.