ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

vazioni fatte all'Osservatorio al Collegio Romano da me e dagli astronomi Bianchi e Giorgio Abetti.

Data	t. m. R. C. R.	α apparente	δ apparente	
1910 ottobre 5	$9^h45^m8^s$	$0^h57^m21^s.92$ ($9^n.482$)	35°27′54″.5 N	(0.210)
" " 8	9 23 45	0 54 48. 13 ($9^n.500$)	35 17 5. 6	(0.234)
" " 11	9 18 36	0 52 13. 31 ($9^n.470$)	35 3 22. 4	(0.210)
" " 15	8 58 16	0 48 50. 12 ($9^n.476$)	34 41 0. 8	(0.236)
" " 17	8 21 5	0 47 12. 58 ($9^n.541$)	34 28 15. 1	(0.305)
" " 25	7 27 24	0 41 7. 17 ($9^n.570$)	33 27 21. 4	(0.366)
" novembre 1	6 50 35	0 36 43. 24 ($9^n.574$)	32 23 32. 9	(0.401).

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Nota del Socio E. Volterra.

Zoologia. — *Un nuovo organo di senso delle salpe.* Nota del Socio F. Todaro.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra alcune questioni relative al problema di Hurwitz.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge [1].

All'equazione alle semisomme ed al determinante di Hurwitz si può agevolmente giungere (come ho già osservato in un lavoro recentemente inserito in questi Rendiconti), estendendo un metodo che il Routh, nella sua *Dinamica*, adopera per l'equazione del quarto grado. In questa breve Nota svolgerò tale estensione. L'equivalenza fra il metodo generale del Routh, per le equazioni di grado > 4, ed il metodo di Hurwitz, è stata elegantemente dimostrata dal dott. E. Bompiani, in un lavoro di prossima pubblicazione, che egli mi ha già cortesemente comunicato.

Sia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

un polinomio di grado n in x, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ le n radici, non necessariamente diverse, dell'equazione $f(x) = 0$. Allora saranno $\alpha_1 - y$, $\alpha_2 - y, \ldots, \alpha_n - y$ le n radici del polinomio di grado n in x

$$\varphi(x) = f(x + y); \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1910.

e saranno $-\alpha_1+y$, $-\alpha_2+y$, ... $-\alpha_n+y$, le n radici del polinomio di grado n in x

$$\psi(x)=f(-x+y). \tag{3}$$

Supponiamo ora, per esempio, che la radice $\alpha_\mu-y$ del polinomio $\varphi(x)$ sia eguale alla radice $-\alpha_\nu+y$ del polinomio $\psi(x)$, dove μ e ν rappresentano indici, anche non diversi, scelti fra i numeri $1, 2, \ldots, n$. Allora otteniamo

$$\alpha_\mu-y=-\alpha_\nu+y,$$

cioè

$$y=\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}. \tag{4}$$

La condizione (4) è dunque necessaria affinchè le due equazioni $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$, abbiano radici comuni; ma è chiaro inoltre che essa è anche sufficiente.

Sviluppando colla formula di Taylor i due polinomî (2) e (3), noi otteniamo

$$\varphi(x)=\frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n+\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots+\frac{f'(y)}{1}x+f(y) \tag{5}$$

$$\pm\psi(x)=\frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n-\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\mp\frac{f'(y)}{1}x\pm f(y). \tag{6}$$

Ed ora, sommando questi due polinomî, poi sottraendone invece uno dall'altro, e dividendo in ambo i casi per 2, si ricavano i due altri polinomî

$$\mathrm{P}(x)=\frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n+\frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!}x^{n-2}+\cdots\cdots \tag{7}$$

$$\mathrm{Q}(x)=\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!}x^{n-3}+\cdots\cdots \tag{8}$$

Se le due equazioni $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$ hanno qualche radice comune, allora anche le due equazioni $\mathrm{P}(x)=0$, $\mathrm{Q}(x)=0$ avranno qualche radice comune, e viceversa. Intanto osserviamo che una delle due equazioni $\mathrm{P}(x)=0$, $\mathrm{Q}(x)=0$ (quella di grado impari) ha la radice zero; affinchè anche l'altra equazione (quella di grado pari) abbia la radice zero, è necessario e sufficiente che il suo ultimo termine $f(y)$ sia nullo, cioè che y sia uguale ad una delle n grandezze $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, le quali si possono anche scrivere $\frac{\alpha_1+\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2+\alpha_2}{2}, \ldots, \frac{\alpha_n+\alpha_n}{2}$. Dividendo per x il polinomio di grado impari, noi possiamo ai due polinomî $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$, uno di grado pari, l'altro di grado impari, sostituire due polinomî di grado pari. Questi avranno

qualche radice comune sempre e soltanto quando sia y ancora dato dalla formula (4), ma in questa formula saranno da considerarsi μ e ν differenti. La necessità di ritenerli differenti è palese finchè l'equazione $f(x) = 0$ ha le sue radici semplici, perchè allora $f'(y)$, che è l'ultimo termine del polinomio di grado minore, non potrà annullarsi insieme con $f(y)$, che è l'ultimo termine dell'altro; se poi l'equazione $f(x) = 0$ ha qualche radice multipla (per esempio $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r$), allora, per y uguale a questa radice, i due polinomî avranno qualche fattore comune; in quest'ultimo caso il ritenere μ e ν sempre fra di loro differenti non è più cosa necessaria, ma è ben opportuna per evitare ulteriori specificazioni, e si porrà, per esempio, $\alpha_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, senza rinunziare alla riserva che μ e ν siano, nella (4), da considerarsi fra di loro differenti.

Supponendo che n sia pari, $= 2k$, possiamo dire che le nostre considerazioni ci avranno condotti a scrivere due polinomî di grado pari, che avranno radici comuni sempre e soltanto quando valga la (4); in questa formula si riterranno μ e ν fra di loro differenti.

Posto $x^2 = \xi$, questi due polinomî si scriveranno

$$U_1(\xi) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}\xi^k + \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!}\xi^{k-1} + \cdots + f(y)$$

$$V_1(\xi) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\xi^{k-1} + \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!}\xi^{k-2} + \cdots + f'(y).$$

Se poi n è impari $= 2k + 1$, allora i due polinomî, ai quali saremo giunti, si scriveranno

$$U_2(\xi) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}\xi^k + \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!}\xi^{k-1} + \cdots + f'(y)$$

$$V_2(\xi) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\xi^k + \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!}\xi^{k-1} + \cdots + f(y).$$

Se y non annulla $f^{(n-1)}(y)$, possiamo osservare che la somma dei gradi, tanto di U_1 e di V_1 quanto di U_2 e di V_2, vale $n - 1$.

Il risultante di Sylvester di U_1, V_1 coincide evidentemente con quello di U_2, V_2, come risulta dalla sua costruzione. In ognuno dei due casi, costruiremo il determinante

$$(9) \qquad R(y) = \begin{vmatrix} \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} & \frac{f^{(n)}(y)}{n!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} & \cdots & 0 \\ \frac{f^{(n-5)}(y)}{(n-5)!} & \frac{f^{(n-4)}(y)}{(n-4)!} & \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & f'(y) \end{vmatrix}.$$

Le radici dell'equazione $R(y) = 0$ saranno dunque date dalla formula (4), dove si ritenga μ differente da ν. Ora il grado del termine diagonale principale è evidentemente $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \binom{n}{2}$; e basta inoltre un'elementare osservazione, d'ordine generale, sui determinanti, per accorgersi che gli altri termini non possono essere di grado maggiore. Se, infatti, il determinante (9) si pone sotto la forma $\sum \pm c_{1\alpha} c_{2\beta} \ldots c_{n\nu}$, allora la disposizione $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, che si può ottenere da $1, 2, \ldots, n$ con successivî scambî di due soli elementi, non innalza certamente il grado $\binom{n}{2}$ del termine principale, appunto perchè gli scambî di due colonne operano in modo da lasciarlo inalterato, o da abbassarlo per l'incontro di uno zero.

Ma allora l'equazione

$$R(y) = 0 \tag{10}$$

è precisamente l'equazione alle semisomme relativa all'equazione proposta $f(x) = 0$ [1].

Gli elementi del determinante (9) sono i coefficienti del polinomio $\varphi(x) = f(x + y)$. Se vi si pone $y = 0$, ritroviamo dunque i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ del polinomio $f(x)$; ciò mostra che, nel polinomio $R(y)$, il termine indipendente da y è dato dal determinante d'ordine $n - 1$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

che abbiamo già incontrato nei miei recenti lavori.

Intanto risulta subito che esso, considerato come una forma nelle $\alpha_\mu, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_n$ ha per fattori tutte le $\binom{n}{2}$ semisomme $\frac{\alpha_\mu + \alpha_\nu}{2}$ (o somme $\alpha_1 + \alpha_2$), che si ottengono combinando binariamente le n grandezze $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Ma questo risultato, che in modo molto preciso si può, come abbiamo altrove fatto vedere, dedurre da una formula stabilita per induzione, si può anche, in base ai principî qui esposti, dedurre in modo più breve, senza valersi del determinante (9).

[1] È chiaro che il caso delle radici multiple, che si può sempre ottenere come caso limite, non può costituire eccezioni.

Se le due equazioni $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$ hanno qualche radice comune, per esempio $\alpha_\mu = -\alpha_\nu$, allora sarà $\alpha_\mu + \alpha_\nu = 0$; e viceversa. Intanto, se $f(x) = 0$ ed $f(-x) = 0$ hanno qualche radice comune, allora anche le due equazioni

$$a_0 x^n + a_2 x^{n-2} + \cdots = 0$$
$$a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \cdots = 0,$$

dedotte rispettivamente come $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ sono state dianzi dedotte da $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, cioè per somma e per differenza (e conseguente divisione per 2), avranno qualche radice comune; e viceversa. Uno di questi due ultimi polinomî è di grado pari, ed ha per ultimo termine a_n; dividendo l'altro per x, ci riduciamo a due polinomî di grado pari, nei quali porremo $x^2 = \xi$. Il determinante (11) sarà il risultante di Sylvester di questi polinomî in ξ, così ottenuti; questo risultante si annullerà, dunque, ogni volta che sia $\alpha_\mu + \alpha_\nu = 0$, e solo allora; ma gl'indici μ e ν si possono ritenere differenti fra di loro, perchè se fosse $\alpha_\mu = -\alpha_\mu$, allora $f(x) = 0$ avrebbe la radice zero: se questa fosse semplice, allora essa non sarebbe comune ai due polinomî in ξ; se poi fosse multipla ($\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$), allora nessuno vieterebbe di considerare μ e ν differenti, purchè scelti (quando venisse in considerazione tale radice) fra i numeri $1, 2, \ldots r$.

Dunque il determinante (11) contiene tutte le $\binom{n}{2}$ semisomme $\frac{\alpha_\mu + \alpha_\nu}{2}$ (o somme $\alpha_\mu + \alpha_\nu$) come fattori.

Non è forse inopportuno far notare che, partendo dai due polinomî $f(ix)$, $f(-ix)$, si giungerebbe ai due polinomî

$$a_0 x^n - a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} - \cdots$$
$$a_1 x^{n-1} - a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} - \cdots,$$

il risultante dei quali si presenta un po' diverso dall'altro, sebbene sia sostanzialmente lo stesso (il che si vede anche con agevoli osservazioni dirette).

Anche l'algoritmo del massimo comune divisore fra i polinomî in ξ, che, nel modo descritto, si ottengono, può, convenientemente studiato, prestarsi ad importanti riflessioni.

In una Memoria, quasi ultimata, che pubblicherò fra non molto, saranno poste meglio in luce le relazioni fra le varie Note che ho pubblicate su questo argomento [1].

Terminerò, per ora, osservando che al determinante (11) si può anche giungere dalla considerazione del polinomio $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$: questa considerazione appare forse un po' slegata dalle altre che qui si fanno, ma ne rende possibili alcune notevoli estensioni.

[1] Con agevoli osservazioni comparative, che, per brevità qui omettiamo, fra i risultanti di Bézout e di Sylvester, si ritrovano alcune fra le considerazioni da noi direttamente fatte sul determinante di Hurwitz, ed altre abbastanza notevoli, che saranno svolte in tale lavoro.