ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

della cometa può abbastanza bene essere giustificato se, nell'ipotesi dell'identità, si pensa che l'opposizione dell'astro sarebbe in coincidenza abbastanza stretta col passaggio al perielio. Se la cometa ritrovata dal dott. Cerulli sulla lastra fotografica è la cometa periodica di Faye, il servizio reso alla scienza è maggiore di quello che sarebbe se l'astro fosse una cometa nuova.

Matematica. — *Sulla variazione di curvatura delle geodetiche spiccate da un punto di una superficie.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Occupandomi del comportamento in superficie di certe funzioni potenziali, ho avuto bisogno di risolvere la questione che forma argomento della presente Nota. Sia data una superficie σ, si fissi sopra essa un punto M, del resto qualunque, e si considerino tutte le geodetiche di σ spiccate da M.

Sia c la curvatura di una generica di esse, e ds il suo elemento di arco; si domanda: come varia, da geodetica a geodetica, la $\frac{dc}{ds}$ in M?

Dette c_1 e c_2 le curvature principali di σ in M, ds_u e ds_v gli elementi d'arco delle linee di curvatura u, v, e θ l'angolo che la geodetica che si considera, forma colla linea v, la formula che contiene la risposta alla domanda precedente, è

$$\text{(I)} \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{\partial c_2}{\partial s_v}\cos^3\theta + \frac{\partial c_1}{\partial s_u}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{3}{2}\left[\frac{\partial c_2}{\partial s_u}\cos\theta + \frac{\partial c_1}{\partial s_v}\operatorname{sen}\theta\right]\operatorname{sen} 2\theta .$$

Per le superficie di rotazione essa assume la forma, notevolmente più semplice

$$\text{(II)} \qquad \frac{dc}{ds} = c_2\left[\frac{dc_2}{d\varphi}\cos^2\theta + 3\,\frac{dc_1}{d\varphi}\operatorname{sen}^2\theta\right]\cos\theta ,$$

essendo φ la latitudine.

Applicando la (II) all'ellissoide schiacciato (seconda approssimazione del geoide) si ritrova una formula ben nota in geodesia.

Dalle precedenti formule scende la seguente notevole proposizione. Fra tutte le geodetiche spiccate da un punto di una superficie, ve ne sono, in generale, tre secondo cui la variazione della curvatura è nulla [1] e tre secondo le quali questa variazione raggiunge un massimo o un minimo. In particolare, sulle superficie di rotazione, è nulla in un generico punto la $\frac{dc}{ds}$ relativa alla geodetica normale al meridiano, in quel punto.

[1] Una proposizione analoga, per le sezioni normali, fu enunciata, già molti anni or sono, da A. Transon, Journal de Mathématiques, tom. VI, 1841, pag. 199.

1. Si consideri una superficie σ dotata in ogni punto di piano tangente e di linee di curvatura.

Fissiamo sopra σ due sistemi di linee coordinate u, v.

Siano corrispondentemente

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$
$$(2) \qquad \Phi = \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2,$$

la prima e la seconda forma fondamentale della superficie σ.

Sia l una linea qualunque tracciata sopra σ, e chiamiamo: c la curvatura di l in un generico suo punto M; ε l'angolo, contato tra 0 e π, formato dalle direzioni positive della normale principale di l e della normale alla superficie in M.

Pel teorema di Meusnier si ha

$$(3) \qquad c\cos\varepsilon = \frac{\Phi}{ds^2}.$$

Se l è una geodetica di σ si ha $\cos\varepsilon = \pm 1$, secondochè la concavità di l è rivolta verso la direzione positiva o negativa della normale.

Per questa, la (3) intanto diviene $c = \pm \frac{\Phi}{ds^2}$. È opportuno attribuire un segno anche a c. Converremo di contare c positivo, se la direzione che va dal centro di curvatura della geodetica l al piede M della normale coincide col verso positivo di questa, negativo nel caso opposto. Con questa convenzione abbiamo in tutti i casi [1]

$$(4) \qquad c = -\frac{\Phi}{ds^2}.$$

Assumiamo ora a linee coordinate le linee di curvatura; indicando con c_1, c_2 le curvature principali di σ nel generico suo punto M, abbiamo [2]

$$(5) \qquad \mathrm{F} = \mathrm{D}' = 0 \quad , \quad \mathrm{D} = -c_2\mathrm{E} \quad , \quad \mathrm{D}'' = -c_1\mathrm{G}.$$

Per queste e per la (2), la (4) diviene

$$c = c_2\,\mathrm{E}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + c_1\,\mathrm{G}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Indicando con θ l'angolo formato dalle tangenti in M alla geodetica l ed alla linea v, abbiamo

$$(6) \qquad \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{ds} = \cos\theta \quad , \quad \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{ds} = \operatorname{sen}\theta.$$

[1] Cfr. Bianchi, loc. cit., pp. 121 e 131.

[2] Cfr. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa, Spoerri, 1902, vol. I, pag. 130.

Per queste la precedente diviene

$$c = c_2 \cos^2\theta + c_1 \operatorname{sen}^2\theta . \tag{7}$$

Questa formula definisce il modo di variare della curvatura spettante alle geodetiche passanti pel punto M. Come è ben naturale, essa coincide colla nota formula di Eulero per le sezioni normali. Ma è importante rilevare che mentre per le sezioni normali, in un punto assegnato, la (7) vale solo *localmente, essa continua invece a valere lungo una qualsiasi geodetica.*

Chiamiamo s l'arco di una geodetica uscente da M, contato a partire da M stesso.

Per quanto si è detto, la (7) è derivabile rispetto ad s; si ottiene così

$$\frac{dc}{ds} = \frac{dc_2}{ds}\cos^2\theta + \frac{dc_1}{ds}\operatorname{sen}^2\theta + (c_1 - c_2)\,.\operatorname{sen} 2\theta\,.\frac{d\theta}{ds}\,, \tag{8}$$

dove la $\frac{d\theta}{ds}$ è definita, a norma della equazione differenziale di Gauss per le geodetiche, dalla relazione seguente [1]:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{du}{ds} - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}\,. \tag{9}$$

A questa relazione può darsi un'altra forma contenente soltanto elementi intrinseci della superficie.

Le formule di Mainardi-Codazzi [2]

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D}{\sqrt{E}}\right] - \frac{D''}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D''}{\sqrt{G}}\right] - \frac{D}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0\,,$$

per le (5), dànno rispettivamente

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{c_1 - c_2}\frac{\partial c_2}{\partial v}\,,\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{-1}{c_1 - c_2}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial u}\,.$$

Per queste e per le (6), la (9) diviene

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c_1 - c_2}\left[\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}}\frac{\partial c_2}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{E}}\frac{\partial c_1}{\partial u}\right],$$

ovvero, introducendo gli archi elementari ds_u, ds_v delle u, v, legati a dv e du dalle note formule

$$ds_u = \sqrt{G}\,dv \quad , \quad ds_v = \sqrt{E}\,du\,, \tag{10}$$

[1] Cfr. Bianchi, loc. cit., pag. 190.
[2] Cfr. Bianchi, loc. cit., pag. 122.

la (9) in definitiva può scriversi in forma intrinseca nel modo seguente

$$(9') \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c_1 - c_2}\left[\frac{\partial c_2}{\partial s_u}\cos\theta + \frac{\partial c_1}{\partial s_v}\operatorname{sen}\theta\right] \text{ [1]}.$$

D'altra parte, per le (6) e le (10), abbiamo

$$\frac{dc_i}{ds} = \frac{\partial c_i}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial c_i}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\frac{\partial c_i}{\partial u} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{G}}\frac{\partial c_i}{\partial v} = \frac{\partial c_i}{\partial s_v}\cos\theta + \frac{\partial c_i}{\partial s_u}\operatorname{sen}\theta,$$
$$(i = 1\,,\,2).$$

Per queste e per la (9'), dalla (8) si ottiene in definitiva

$$(8') \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{\partial c_2}{\partial s_v}\cos^3\theta + \frac{\partial c_1}{\partial s_u}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{3}{2}\left[\frac{\partial c_2}{\partial s_u}\cos\theta + \frac{\partial c_1}{\partial s_v}\operatorname{sen}\theta\right]\operatorname{sen}2\theta.$$

Questa formula esprime appunto il modo di variare di $\frac{dc}{ds}$ in M al variare di θ, essendo $\frac{\partial c_1}{\partial s_v}$, $\frac{\partial c_1}{\partial s_u}$, $\frac{\partial c_2}{\partial s_v}$, $\frac{\partial c_2}{\partial s_u}$ elementi intrinseci della superficie.

2. È interessante notare che, mentre la media dei valori di c in M, cioè $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c\,d\theta$ è notoriamente la curvatura media $\frac{c_1 + c_2}{2}$ della superficie in M, invece *la media dei valori di* $\frac{dc}{ds}$ *in* M *è identicamente nulla.*

Infatti se si nota che sono nulli gli integrali

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta\;,\quad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\;,\quad \int_0^{2\pi}\cos\theta\operatorname{sen}2\theta\,d\theta\;,\quad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta\,d\theta,$$

dalla (8') risulta nullo l' $\int_0^{2\pi}\frac{dc}{ds}\,d\theta$; c. d. d.

Dalla (8') e da quella che se ne ottiene mediante derivazione rispetto a θ scende la seguente proposizione. *Fra tutte le geodetiche spiccate da*

[1] Alla (9') si può pervenire assai speditamente coi metodi del prof. Ricci [*Lezioni sulla teoria delle superficie.* Padova, fratelli Drucker (1898), ed. litografata]. Infatti la equazione differenziale di Gauss si trova ivi già espressa in forma intrinseca, nel modo seguente: $\frac{d\theta}{ds} = \gamma\cos\theta - (\gamma)\operatorname{sen}\theta$, essendo γ e (γ) le curvature geodetiche [cfr. Ricci, loc. cit., pp. 174-175-184 186] di due sistemi di linee ortogonali tracciate sulla superficie. Le formule di Mainardi-Codazzi dànno allora nel nostro caso

$$(c_2 - c_1)(\gamma) = \frac{\partial c_1}{\partial s_v}\,,\quad (c_1 - c_2)\gamma = \frac{\partial c_2}{\partial s_u}\,,$$

[cfr. Ricci, loc. cit., pag. 296, formula c_1) in cui si sono cambiati ω_1 e ω_2 rispettivamente in c_2 e c_1]; dalle quali si ricavano γ e (γ), che portate nella precedente espressione di $\frac{d\theta}{ds}$, dànno senz'altro la (9').

un punto di una superficie ve ne sono, in generale, tre secondo cui la variazione della curvatura è nulla $\left(\frac{dc}{ds}=0\right)$; *e tre secondo cui questa variazione raggiunge un massimo o un minimo* $\left(\frac{d}{d\theta}\frac{dc}{ds}=0\right)$.

3. Per le superficie di rotazione la (8') si semplifica notevolmente. Le linee di curvatura v e u sono rispettivamente i meridiani ed i paralleli. Sussistono perciò in ogni punto della superficie le relazioni

$$\frac{\partial c_1}{\partial s_u}=\frac{\partial c_2}{\partial s_u}=0\,.$$

Per queste, la (8') diviene

$$\frac{dc}{ds}=\left[\frac{\partial c_2}{\partial s_v}\cos^2\theta+3\,\frac{\partial c_1}{\partial s_v}\,\mathrm{sen}^2\theta\right]\cos\theta.$$

Se si introduce la latitudine φ, il valore assoluto della curvatura del meridiano è manifestamente $\frac{|d\varphi|}{ds}$. Se il senso positivo sulla normale alla superficie (che abbiamo lasciato finora indeterminato) si fissa in modo opportuno (¹), si ha in ogni caso $c_2=\frac{d\varphi}{ds_v}$; perciò la precedente può scriversi in definitiva

$$\frac{dc}{ds}=c_2\left[\frac{dc_2}{d\varphi}\cos^2\theta+3\,\frac{dc_1}{d\,\varphi}\,\mathrm{sen}^2\theta\right]\cos\theta. \tag{11}$$

Da questa risulta, che delle geodetiche spiccate da un punto M di σ quella tangente alla linea u che passa per M $\left(\theta=\pm\frac{\pi}{2}\right)$, ha sempre nulla la variazione di curvatura.

Se poi $\frac{dc_1}{d\varphi}$ e $\frac{dc_2}{d\varphi}$ hanno in M segni contrarî, ne esistono altre due formanti tra loro un angolo

$$2\theta=\mathrm{arctg}\sqrt{-3\,\frac{\frac{dc_1}{d\varphi}}{\frac{dc_2}{d\varphi}}}$$

ed avente il meridiano per bisettrice.

4. Immaginiamo, in particolare, che la superficie di cui si tratta sia l'ellissoide schiacciato di rotazione, di semiassi a e b e di eccentricità

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,.$$

(¹) Più precisamente si sceglie per senso positivo della normale quello rivolto verso l'esterno (convessità) o verso l'interno (concavità) del meridiano, secondo che φ cresce o decresce, procedendo lungo il ds_v che si considera.

Allora è [1]

$$c_2 = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \quad , \quad c_1 = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a} . \tag{12}$$

Da queste, derivando, si ricavano le seguenti

$$\frac{dc_2}{d\varphi} = \frac{-3 e^2 [1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2\varphi}{2a[1 - e^2]} , \quad \frac{dc_1}{d\varphi} = \frac{-e^2 [1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2\varphi}{a} .$$

Per queste, e per le (12), la (11) diviene

$$\frac{dc}{ds} = -\frac{3 e^2}{2 a^2} \left[\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2}\right]^2 \left[1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta}{a^2 c_1^2}\right] \cos\theta . \operatorname{sen} 2\varphi ,$$

ovvero, posto

$$1 - \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2 c_1^2} = \frac{1}{k} , \tag{13}$$

si ha, tenendo sempre presenti le (12),

$$\frac{dc}{ds} = -\frac{3 e^2 c_2^2 \operatorname{sen} 2\varphi . \cos\theta}{2k[1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]} .$$

D'altra parte il teorema di Gudermann dà la relazione $c = \frac{c_2}{k}$; che si può dedurre immediatamente dalla (7), ove si tengano presenti le (12) e la (13).

Per questa la precedente può scriversi, dividendo ambo i membri per $-c^2$,

$$-\frac{1}{c^2} \frac{dc}{ds} = \frac{d\frac{1}{c}}{ds} = \frac{3k e^2 \cos\theta \operatorname{sen} 2\varphi}{2[1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]} , \tag{14}$$

formula, ben nota in geodesia, che dà la variazione del raggio di curvatura lungo una geodetica dell'ellissoide schiacciato [2].

[1] Cfr. ad es. Pizzetti, *Trattato di geodesia teoretica*. Bologna, Zanichelli, 1905. pp. 36-37.

[2] Cfr. Pizzetti, loc. cit., pag. 61.